MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

OTTO BLUMENTHAL

IN AACHEN

ERICH HECKE

IN HAMBURG

Sonderabdruck aus Band 101, Heft 2 und 3.

Kurt Mahler

Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen.

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1929

Sonderdruck aus Mathematische Annalen, Band 101 Heft 2/3.

Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen.

Von

Kurt Mahler in Krefeld.

Das Ziel dieser Arbeit ist der Nachweis einer allgemeinen Funktionenklasse, bei der aus der funktionentheoretischen Transzendenz folgt, daß die Funktion an algebraischen Stellen gleich transzendenten Zahlen ist, wenn von gewissen „singulären" Punkten abgesehen wird.

Das Hauptergebnis lautet:

Die Matrix

$$\Omega = (o_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

mit den Potenzen

$$\Omega^k = (o_{\alpha\beta}^{(k)}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

habe nichtnegative ganze rationale Elemente. Die charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) = |\Omega - \varrho E| = 0 \qquad (E = \text{Einheitsmatrix})$$

sei im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel; sie habe eine positive Wurzel ϱ_1, die größer als Eins und der absolute Betrag der anderen Wurzeln ist. Mit $A_{1\beta}^{(1)}$ seien die Unterdeterminanten der obersten Horizontalreihe der Matrix $\Omega - \varrho_1 E$ bezeichnet; dieselben haben alle das gleiche Vorzeichen.

$(z) = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sei ein System von n komplexen Veränderlichen; es bedeute $z' = \Omega^k z$ die Transformation

$$z'_\alpha = \prod_{\beta=1}^{n} z_\beta^{o_{\alpha\beta}^{(k)}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Die in der Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe

$$F(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \ldots h_n} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

besitze Koeffizienten $A_{h_1 \ldots h_n}$ aus einem endlichen algebraischen Zahlkörper; sie stelle *keine* algebraische Funktion dar. $F(z)$ genüge einer Funktionalgleichung

$$F(\Omega z) = \frac{\sum\limits_{l=0}^{m} a_l(z)\, F(z)^l}{\sum\limits_{l=0}^{m} b_l(z)\, F(z)^l} \qquad (1 \leqq m < \varrho_1),$$

wo die $a_l(z)$, $b_l(z)$ Polynome in den z_α mit algebraischen Koeffizienten sind. Die beiden Polynome in den z_α und in u

$$\sum_{l=0}^{m} a_l(z)\, u^l, \qquad \sum_{l=0}^{m} b_l(z)\, u^l$$

seien teilerfremd; mindestens eines besitze den genauen Grad m in u. Ihre Resultante in bezug auf u sei gleich $\Delta(z)$.

Sind dann die z_α gleich n algebraischen Zahlen und befriedigen sie die Ungleichungen

$$\Re\left\{\sum_{\beta=1}^{n} |A_{1\beta}^{(1)}| \log z_\beta\right\} < 0, \quad z_1 z_2 \dots z_n \neq 0, \quad \Delta(\Omega^k z) \neq 0 \text{ für } k = 0, 1, 2, \dots,$$

so stellt $F(z)$ eine transzendente Zahl dar.

Der Sinn dieses Satzes liegt in der Verknüpfung zwischen der funktionentheoretischen und der zahlentheoretischen Transzendenz. Es gibt ganz einfache Funktionen, die Gleichungen der betrachteten Art genügen, und von denen trotz ihrer Ähnlichkeit die eine eine algebraische, die andere eine transzendente Funktion ist, z. B.

$$f_1(z) = \prod_0^\infty (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}; \qquad f_1(z^2) = (1+z)^{-1} f_1(z);$$

$$f_2(z) = \prod_0^\infty (1 - z^{2^n}), \qquad f_2(z^2) = (1-z)^{-1} f_2(z).$$

Ferner kann von zwei Lösungen derselben Funktionalgleichung die eine algebraisch, die andere transzendent sein, z. B.

$$f_3(z) = 1, \qquad f_4(z) = 1 + f_2(z); \qquad f_{3,4}(z^2) = (1-z)^{-1} f_{3,4}(z) - \frac{z}{1-z}.$$

In derartigen Fällen gibt es neben dem Unterschied des Funktionencharakters also auch einen entsprechenden Unterschied im Charakter der Funktionswerte.

Die einschränkenden Voraussetzungen des Satzes sind teilweise natürlicher Art:

Die Ungleichung

$$\Re\left\{\sum_{\beta=1}^{n} |A_{1\beta}^{(1)}| \log z_\beta\right\} < 0$$

gibt das größte Gebiet an, in dem alle Komponenten $z_1', z_2', \dots, z_n'$ von

$$z' = \Omega^k z$$

mit wachsendem k gegen Null streben. Schon in ganz einfachen Fällen von Funktionen $F(z)$ ist der Rand dieses Gebietes natürliche Grenze. Vielleicht läßt sich sogar zeigen, daß keine transzendente Lösung einer Gleichung der betrachteten Art sich über jenes Gebiet hinaus fortsetzen läßt.

Die beiden weiteren Einschränkungen

$$z_1 z_2 \ldots z_n \neq 0, \qquad \Delta(\Omega^k z) \neq 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

sind dadurch bedingt, daß ohne sie $F(z)$ tatsächlich gar nicht transzendent sein braucht. Wenn eine der Komponenten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ verschwindet, so ist in der Tat $F(z)$ für algebraische z_α algebraisch. Es lassen sich ferner allgemeine Fälle angeben, wo $F(z)$ für algebraische z_α algebraisch wird, sobald eine der Gleichungen

$$\Delta(\Omega^k z) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

besteht.

Es bleiben die Annahmen über die Matrix Ω. Diese sind durch die Beweismethode bedingt; in einer weiteren Arbeit hoffe ich Fälle anderer Matrizen Ω zu behandeln.

Der Beweis des Satzes verläuft folgendermaßen:

Gegen den Satz sei $F(z)$ algebraisch, ferner endlich. Dann existiert ein endlicher algebraischer Zahlkörper $K(s)$, in dem liegen:

a) die Zahlen z_α,

b) die Zahl $F(z)$,

c) die Koeffizienten der Polynome $a_l(z)$, $b_l(z)$,

d) die Koeffizienten der Potenzreihe $F(z)$.

Zu jeder festen, genügend großen natürlichen Zahl p gibt es $p+1$ Polynome

$$\mathfrak{A}_0(z), \mathfrak{A}_1(z), \ldots, \mathfrak{A}_p(z)$$

vom Höchstgrad p in den z_α mit ganzen Koeffizienten aus $K(s)$, so daß alle Koeffizienten $B_{h_1 \ldots h_n}$ mit

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n \leqq \frac{1}{2} p^{1+\frac{1}{n}}$$

in

$$E_p(z) = \sum_{l=0}^{p} \mathfrak{A}_l(z) F(z)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \ldots h_n} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

verschwinden, ohne daß $E_p(z)$ identisch verschwindet. Vermöge der Funktionalgleichung wird

$$F(\Omega^k z) = \frac{\sum\limits_{l=0}^{m^k} a_l^{(k)}(z) F(z)^l}{\sum\limits_{l=0}^{m^k} b_l^{(k)}(z) F(z)^l}$$

mit einfachen Majoranten in s und den z_α für die Polynome $a_l^{(k)}(z)$, $b_l^{(k)}(z)$ vermöge der Annahmen über Ω. Das gleiche gilt also auch für die Polynome $\mathfrak{B}_l^{(k)}(z)$ in der Gleichung

$$\mathfrak{E}_p^{(k)}(z) = \left(\sum_{l=0}^{m^k} b_l^{(k)}(z)\, F(z)^l\right)^p E_p(\Omega^k z) = \sum_{l=0}^{p\,m^k} \mathfrak{B}_l^{(k)}(z)\, F(z)^l .$$

Es wird für großes k, nach Potenzen einer geeigneten erzeugenden Zahl s von $K(s)$ entwickelt (die c sind positive Konstante, die von p und k nicht abhängen):

$$\mathfrak{E}_p^{(k)}(z) = \sum_{\tau=0}^{[c_9 p \varrho_1^k]} q_\tau s^\tau ; \qquad |q_\tau| \leqq (2^{c_9} e^{c_8})^{p \varrho_1^k} .$$

Die q_τ bedeuten dabei ganze rationale Zahlen. Weiter ist aber für genügend großes k

$$\mathfrak{E}_p^{(k)}(z) \neq 0,$$

denn einerseits folgt dann

$$\sum_{l=0}^{m^k} b_l^{(k)}(z)\, F(z)^l \neq 0$$

vermöge der Annahme

$$\Delta(\Omega^k z) \neq 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und andrerseits

$$E_p(\Omega^k z) \neq 0$$

vermöge

$$z_1 z_2 \ldots z_n \neq 0 .$$

Die vorige Majorante liefert daher auf elementare Art eine *untere Schranke*

$$|\mathfrak{E}_p^{(k)}(z)| \geqq e^{-c_{13} p \varrho_1^k} .$$

Schließlich ergibt sich aus der Potenzreihe für $E_p(z)$, wenn p und als Funktion hiervon k genügend groß ist, unmittelbar eine *obere Schranke*

$$|\mathfrak{E}_p^{(k)}(z)| \leqq e^{-c_6 p^{1+\frac{1}{n}} \varrho_1^k} .$$

Diese beiden Abschätzungen widersprechen einander aber, sobald p genügend groß ist. Also kann $F(z)$ keine endliche algebraische Zahl sein. Daß aber $F(z)$ auch nicht unendlich groß ist, läßt sich dann leicht aus der Funktionalgleichung folgern.

Das letzte Kapitel bringt eine Anwendung. ω sei eine positive quadratische Irrationalität. Dann wird gezeigt, daß die transzendente Funktion

$$\sum_{h_1=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{[\omega h_1]} z_1^{h_1} z_2^{h_2}$$

einer Funktionalgleichung gerade von der betrachteten Art genügt, so daß sich der Satz also auf sie anwenden läßt. Speziell ergibt sich so die Transzendenz von

$$\sum_{h=1}^{\infty} [h\,\omega]\, z^h,$$

wenn $0 < |z| < 1$ und z algebraisch ist: Dies ist ein Analogon zu einem Satz von Böhmer[1]).

I.

1. Die Elemente der Matrix

$$\Omega = (o_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

seien nichtnegative ganze rationale Zahlen. Die charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) = |\Omega - \varrho E| = \varrho^n - s_1 \varrho^{n-1} + s_2 \varrho^{n-2} - + \ldots \mp s_n = 0,$$

wo

$$E = (\delta_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

die Einheitsmatrix bedeutet, sei im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel. Ihre n Wurzeln

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$$

sind alle verschieden und algebraisch genau vom Grad n.

Die Potenzen von Ω lassen sich nach den Grundlagen der Differenzenrechnung in der Form

$$\Omega^k = \sum_{l=1}^{n} \varrho_l^k\, \Gamma_l$$

darstellen; die Matrizen Γ_l hängen dabei von k nicht ab. Aus dieser Darstellung folgt die bekannte Hamilton-Cayleysche Identität[2])

$$\Omega^n - s_1 \Omega^{n-1} + s_2 \Omega^{n-2} - + \ldots \mp s_n E = 0,$$

und da die Potenzen von Ω miteinander vertauschbar sind, so ist

$$\prod_{l=1}^{n} (\Omega - \varrho_l E) = 0.$$

2. Die Faktoren

$$\Omega - \varrho_l E$$

der vorigen Gleichung besitzen alle den genauen Rang $n - 1$.

Daß der Rang nicht größer ist, ist klar. Er ist auch nicht kleiner, denn die Hauptunterdeterminanten $(n-1)$-ten Grades von $\Omega - \varrho_l E$ sind

[1]) P. E. Böhmer, „Über die Transzendenz gewisser dyadischer Brüche". Math. Annalen **96**.

[2]) Siehe z. B. hierzu Cayley, Coll. math. papers II, p. 482.

gewiß ungleich Null, weil ϱ_l einer Gleichung vom Grad $n-1$ nicht genügen kann.

3. Es besteht keine Identität

$$c_0 E + c_1 \Omega + \ldots + c_{n-1} \Omega^{n-1} = 0,$$

wo die Konstanten c nicht alle verschwinden[3]).

Nach der vorigen Gleichung ist

$$c_0 \Omega^k + c_1 \Omega^{k+1} + \ldots + c_{n-1} \Omega^{k+n-1} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

und also auch

$$\sum_{l=1}^{n} (c_0 + c_1 \varrho_l + \ldots + c_{n-1} \varrho_l^{n-1}) \varrho_l^k \Gamma_l = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Da die Determinante

$$|\varrho_l^k|$$

nicht verschwindet, so muß entweder

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \ldots = \Gamma_n = 0$$

sein; das ist wegen

$$E = \sum_{l=1}^{n} \Gamma_l$$

unmöglich; oder es ist

$$c_0 + c_1 \varrho_l + \ldots + c_{n-1} \varrho_l^{n-1} = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

und daher

$$c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0.$$

Insbesondere ist

$$\Delta_l = \prod_{\substack{1 \\ h \neq l}}^{n} (\Omega - \varrho_h E) \neq 0.$$

4. Die Matrizen Δ_l lassen sich durch die Gleichungen

$$(\Omega - \varrho_l E) \Delta_l = \Delta_l (\Omega - \varrho_l E) = 0$$

bestimmen. Sei zur Abkürzung

$$\Omega - \varrho_l E = (a_{\alpha\beta}^{(l)}) = (o_{\alpha\beta} - \varrho_l \delta_{\alpha\beta}); \quad \Delta_l = (\zeta_{\alpha\beta}^{(l)}) \quad (\alpha, \beta, l = 1, 2, \ldots, n)$$

und $A_{\beta\alpha}^{(l)}$ die zu $a_{\alpha\beta}^{(l)}$ gehörige Unterdeterminante $(n-1)$-ten Grades in $\Omega - \varrho_l E$. Nach oben bestehen die linearen Gleichungen

$$\sum_{\gamma=1}^{n} a_{\alpha\gamma}^{(l)} \zeta_{\gamma\beta}^{(l)} = \sum_{\gamma=1}^{n} a_{\gamma\alpha}^{(l)} \zeta_{\beta\gamma}^{(l)} = 0 \quad (\alpha, \beta, l = 1, 2, \ldots, n),$$

[3]) Dieser Satz folgt bereits daraus, daß die Wurzeln der charakteristischen Gleichung alle verschieden sind. Siehe Frobenius, Journ. f. Math. **84**, S. 11.

die durch

$$\zeta_{1\beta}^{(l)} : \zeta_{2\beta}^{(l)} : \ldots : \zeta_{n\beta}^{(l)} = A_{11}^{(l)} : A_{21}^{(l)} : \ldots : A_{n1}^{(l)} \qquad (\beta, l = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\zeta_{\alpha 1}^{(l)} : \zeta_{\alpha 2}^{(l)} : \ldots : \zeta_{\alpha n}^{(l)} = A_{11}^{(l)} : A_{12}^{(l)} : \ldots : A_{1n}^{(l)} \qquad (\alpha, l = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigt werden. Also ist

$$\zeta_{\alpha\beta}^{(l)} = A^{(l)} A_{1\alpha}^{(l)} A_{\beta 1}^{(l)} \qquad (\alpha, \beta, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Zahl $A^{(l)}$ hängt von den Indizes α und β nicht ab; sie ist gewiß von Null verschieden.

Somit besteht die Darstellung

$$\Delta_l = A^{(l)} (A_{1\alpha}^{(l)} A_{\beta 1}^{(l)}) \qquad (\alpha, \beta, l = 1, 2, \ldots, n).$$

5. Wenn $h_1, h_2, \ldots, h_n$ n ganze rationale Zahlen sind, so ist nur dann

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A_{1\alpha}^{(l)} h_\alpha = 0$$

oder

$$\sum_{\beta=1}^{n} A_{\beta 1}^{(l)} h_\beta = 0,$$

wenn alle h_α verschwinden.

Denn sei etwa

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A_{1\alpha}^{(l)} h_\alpha = 0;$$

nach bekannten Regeln gelten die weiteren Gleichungen

$$\sum_{\alpha=1}^{n} A_{1\alpha}^{(l)} a_{\alpha\beta}^{(l)} = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Der Rang der rechteckigen Matrix

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \ldots & h_n \\ a_{11}^{(l)} & a_{12}^{(l)} & \ldots & a_{1n}^{(l)} \\ \vdots & & & \\ a_{n1}^{(l)} & a_{n2}^{(l)} & \ldots & a_{nn}^{(l)} \end{pmatrix}$$

ist folglich höchstens gleich $n-1$. Sei jetzt etwa $h_\alpha \neq 0$. Dann kommt in der Gleichung

$$\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \ldots & h_n \\ a_{11}^{(l)} & a_{12}^{(l)} & \ldots & a_{1n}^{(l)} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{\alpha-1,1}^{(l)} & a_{\alpha-1,2}^{(l)} & \ldots & a_{\alpha-1,n}^{(l)} \\ a_{\alpha+1,1}^{(l)} & a_{\alpha+1,2}^{(l)} & \ldots & a_{\alpha+1,n}^{(l)} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}^{(l)} & a_{n2}^{(l)} & \ldots & a_{nn}^{(l)} \end{vmatrix} = 0,$$

die infolge des niederen Ranges gilt, die Potenz ϱ_l^{n-1} wirklich vor, so daß ϱ_l einer Gleichung $(n-1)$-ten Grades genügt; das ist aber unmöglich.

Es folgt insbesondere, daß keine der Zahlen

$$A_{1\alpha}^{(l)},\ A_{\beta 1}^{(l)}$$

verschwinden kann.

6. Die Matrizen Δ_l sind im wesentlichen gleich den Matrizen Γ_l.

Denn sei zur Abkürzung gesetzt:

$$\frac{\Phi(\varrho)}{\varrho-\varrho_l}=\sum_{h=0}^{n-1}(-1)^h\,\sigma_h^{(l)}\,\varrho^{n-1-h} \qquad (l=1,2,\ldots,n).$$

Offenbar ist

$$\sum_{h=0}^{n-1}(-1)^h\,\sigma_h^{(l)}\,\varrho_\lambda^{n-1-h}=\begin{cases}\Phi'(\varrho_l) & \lambda=l.\\ 0 & \lambda\neq l.\end{cases}$$

Die linearen Gleichungen für Γ_l

$$\Omega^k=\sum_{l=1}^{n}\varrho_l^k\,\Gamma_l \qquad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

ergeben also

$$\Phi'(\varrho_l)\,\Gamma_l=\sum_{h=0}^{n-1}(-1)^h\,\sigma_h^{(l)}\,\Omega^{n-1-h}=\prod_{\substack{1\\ h\neq l}}^{n}(\Omega-\varrho_h E)$$

oder

$$\Gamma_l=\frac{1}{\Phi'(\varrho_l)}\,\Delta_l=A_l\,(A_{1\alpha}^{(l)}A_{\beta 1}^{(l)}) \qquad (\alpha,\beta,l=1,2,\ldots,n).$$

Die Zahl $A_l=\dfrac{A^{(l)}}{\Phi'(\varrho_l)}$ hängt von den Indizes α und β nicht mehr ab und ist von Null verschieden[4]).

7. Sei von jetzt ab von den Wurzeln

$$\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_n$$

eine, etwa ϱ_1, positiv, größer als Eins und als der absolute Wert der anderen. Da keine der Zahlen

$$A_1,\ A_{1\alpha}^{(1)},\ A_{\beta 1}^{(1)}$$

verschwindet, so sind die Elemente von Γ_1 von Null verschieden, so daß für großes k

$$\Omega^k\sim\varrho_1^k\,\Gamma_1$$

[4]) Die hiermit explizit dargestellten Matrizen sind gleich den Frobeniusschen Kovarianten: „Über die schiefe Invariante einer bilinearen oder quadratischen Form", Journ. f. Math. **86**, S. 44. Die Darstellung von Ω^k durch dieselben entspricht der Darstellung quadratischer Formen durch Eigenwerte und Eigenfunktionen.

wird. Hieraus folgt weiter, da Ω^k nichtnegative Elemente hat, daß die Elemente von Γ_1 positiv sind; die reellen Zahlen

$$A_{11}^{(1)},\ A_{12}^{(1)},\ \ldots,\ A_{1n}^{(1)}$$

haben also alle dasselbe Vorzeichen, ebenso die reellen Zahlen

$$A_{11}^{(1)},\ A_{21}^{(1)},\ \ldots,\ A_{n1}^{(1)}.$$

8. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seien n komplexe Veränderliche im Gebiet $\mathfrak{U}$:

$$\Re(\Lambda) < 0, \qquad z_1 z_2 \ldots z_n \neq 0; \qquad \Lambda = \sum_{\beta=1}^{n} |A_{\beta 1}^{(1)}| \log z_\beta .$$

Wenn die k-te Potenz von Ω gleich

$$\Omega^k = (o_{\alpha\beta}^{(k)}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, so bezeichne

$$z' = \Omega^k z$$

die Transformation

$$z'_\alpha = \prod_{\beta=1}^{n} z_\beta^{o_{\alpha\beta}^{(k)}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Man hat

$$\Omega^{k_1+k_2} z = \Omega^{k_1}(\Omega^{k_2} z).$$

Falls in

$$z' = \Omega^k z$$

k ins Unendliche strebt, $h_1, h_2, \ldots, h_n$ n Exponenten sind, so ist

$$\log |z_1'^{h_1} z_2'^{h_2} \ldots z_n'^{h_n}| = \Re(\Lambda)\, \varrho_1^k\, |A_1| \sum_{\alpha=1}^{n} |A_{1\alpha}^{(1)}|\, h_\alpha + o(\varrho_1^k).$$

Wenn speziell die h_α gleich ganzen rationalen Zahlen sind, so kann der Faktor $\sum_{\alpha=1}^{n} |A_{1\alpha}^{(1)}|\, h_\alpha$ nach 5. nicht verschwinden; folglich ist

$$\log |z_1'^{h_1} z_1'^{h_2} \ldots z_n'^{h_n}| \sim \Re(\Lambda)\, |A_1| \sum_{\alpha=1}^{n} |A_{1\alpha}|\, h_\alpha \cdot \varrho_1^k .$$

Man entnimmt hieraus, daß für $k \to \infty$ die Komponenten von z' gegen Null streben, wenn z irgendwo in $\mathfrak{U}$ liegt.

Seien ferner $B_{\bar{h}_1 \ldots \bar{h}_n} z_1'^{\bar{h}_1} \ldots z_n'^{\bar{h}_n}$, $B_{\bar{\bar{h}}_1 \ldots \bar{\bar{h}}_n} z_1'^{\bar{\bar{h}}_1} \ldots z_n'^{\bar{\bar{h}}_n}$ irgend zwei verschiedene nichtverschwindende Potenzausdrücke mit ganzen rationalen Exponenten. Für $k \to \infty$ konvergiert dann der absolute Betrag des Quotienten

$$Q(z') = \frac{B_{\bar{h}_1 \ldots \bar{h}_n}}{B_{\bar{\bar{h}}_1 \ldots \bar{\bar{h}}_n}}\, z_1'^{\bar{h}_1 - \bar{\bar{h}}_1} \ldots z_n'^{\bar{h}_n - \bar{\bar{h}}_n}$$

entweder gegen Null oder gegen Unendlich, denn es ist

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\log |Q(z')|}{\varrho_1^k} = \Re(\Lambda)\, |A_1| \sum_{\alpha=1}^{n} |A_{1\alpha}^{(1)}|\, (\bar{h}_\alpha - \bar{\bar{h}}_\alpha) \lessgtr 0 .$$

9. Die Potenzreihe

$$E(z') = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \ldots h_n} z_1'^{h_1} \ldots z_n'^{h_n}; \qquad z' = \Omega^k z$$

sei nicht identisch Null und konvergiere in der Umgebung des Nullpunktes; z sei ein beliebiger fester Punkt in $\mathfrak{U}$. Sobald k hinreichend groß ist, liegt z' im Konvergenzgebiet der Reihe, so daß dieselbe einen Sinn hat. Nach 8. hat sie genau einen Summanden

$$B_{h_1 \ldots h_n} z_1'^{h_1} \ldots z_n'^{h_n}$$

von höchster Größenordnung für $k \to \infty$; mit ihm besteht die Gleichung

$$E(z') \sim B_{h_1 \ldots h_n} z_1'^{h_1} \ldots z_n'^{h_n}.$$

Also folgt

Satz 1. *z sei ein fester Punkt in $\mathfrak{U}$; die Potenzreihe*

$$E(z') = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \ldots h_n} z_1'^{h_1} \ldots z_n'^{h_n}, \qquad z' = \Omega^k z$$

konvergiere in der Umgebung des Nullpunktes $z' = 0$ und sei nicht identisch gleich Null. Dann gibt es zwei positive Konstanten c und γ, so daß für $k \to \infty$

$$|E(z')| \sim \gamma e^{-c \varrho_1^k}.$$

II.

1. Für das Folgende bezeichnet s eine feste komplexe Zahl, über deren Eigenschaften später verfügt wird. Der Körper der rationalen Funktionen von s mit rationalen Koeffizienten werde $K(s)$, der Ring der Polynome in s mit ganzen rationalen Koeffizienten werde $I(s)$ genannt.

Satz 2. *Die Potenzreihe mit endlichen Koeffizienten aus $K(s)$*

$$F(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \ldots h_n} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

besitze ein Konvergenzgebiet und stelle keine algebraische Funktion dar. Zu jeder genügend großen natürlichen Zahl p gibt es $p+1$ Polynome

$$\mathfrak{A}_0(z),\ \mathfrak{A}_1(z),\ \ldots,\ \mathfrak{A}_p(z)$$

vom Höchstgrad p mit Koeffizienten aus $I(s)$, so daß in der Entwicklung der Funktion

$$E_p(z) = \sum_{l=0}^{p} \mathfrak{A}_l(z)\, F(z)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \ldots h_n} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

alle Koeffizienten $B_{h_1 \dots h_n}$ *mit*

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n \leqq \frac{1}{2} p^{1+\frac{1}{n}}$$

verschwinden, $E_p(z)$ *selbst aber nicht identisch Null ist*[5]).

Denn die Polynome $\mathfrak{A}_l(z)$ besitzen zusammen $(p+1)^{n+1}$ Koeffizienten. Nach bekannten Sätzen über lineare Gleichungen lassen sich dieselben so in $I(s)$ wählen, daß von den Zahlen $B_{h_1 \dots h_n}$ irgendwelche bis zur Höchstzahl $(p+1)^{n+1}-1$ verschwinden, ohne daß alle Polynome $\mathfrak{A}_h(z)$ und damit $E_p(z)$ selbst identisch verschwinden. Insbesondere lassen sich daher alle $B_{h_1 \dots h_n}$ mit

$$h_1 + h_2 + \dots + h_n \leqq \frac{1}{2} p^{1+\frac{1}{n}}$$

zum Verschwinden bringen, denn ihre Anzahl ist für großes p

$$\leqq \left(\frac{1}{2} p^{1+\frac{1}{n}} + 1\right)^n \leqq (p+1)^{n+1} - 1 .$$

2. Für das Folgende bedeuten $c_0, c_1, \dots$ konstante positive Zahlen, die von p und k nicht abhängen; $\gamma_0, \gamma_1, \dots$ und $k_0, k_1, \dots$ konstante positive Zahlen, die von k unabhängig sind, aber noch Funktionen von p sein können.

Satz 3. *$F(z)$ und $E_p(z)$ seien die Funktionen des vorigen Satzes. z bedeute einen festen Punkt in $\mathfrak{U}$. Dann gilt die Abschätzung*

$$\frac{1}{2} \gamma_0 e^{-p^{1+\frac{1}{n}} \gamma_1 \varrho_1^k} \leqq |E_p(z')| \leqq \gamma_0 e^{-p^{1+\frac{1}{n}} \gamma_1 \varrho_1^k};$$

$$z' = \Omega^k z, \qquad \gamma_1 \geqq c_1 \quad \text{für} \quad p \geqq c_0, \qquad k \geqq k_0 .$$

Denn, da $E_p(z) \not\equiv 0$, so besteht nach Satz 1 eine asymptotische Gleichung

$$|E_p(z')| \sim \frac{3}{4} \gamma_0 e^{-p^{1+\frac{1}{n}} \gamma_1 \varrho_1^k}.$$

Nach Satz 2 ist offenbar $\gamma_1 \geqq c_1$ für $p \geqq c_0$; somit folgt die verlangte Ungleichung.

3. Die Funktion $F(z)$ genüge von nun ab einer Funktionalgleichung der Form

[5]) Th. Skolem in der Arbeit: „Einige Sätze über ganzzahlige Lösungen gewisser Gleichungen und Ungleichungen", Math. Annalen **95**, S. 1 benutzt ähnliche Hilfssätze bei der Untersuchung diophantischer Gleichungen. — Es sei bemerkt, daß Satz 2 für algebraische Funktionen seine Gültigkeit einbüßt.

$$F(\Omega z) = \frac{\sum\limits_{l=0}^{m} a_l(z)\, F(z)^l}{\sum\limits_{l=0}^{m} b_l(z)\, F(z)^l},$$

wo die Funktionen

$$a_l(z), \quad b_l(z)$$

Polynome in den z mit endlichen Koeffizienten aus $I(s)$ sind und

$$1 \leqq m < \varrho_1$$

angenommen wird. Ohne Einschränkung werden ferner die beiden Polynome in den z und in $F(z)$:

$$\sum_{l=0}^{m} a_l(z)\, F(z)^l, \qquad \sum_{l=0}^{m} b_l(z)\, F(z)^l$$

als teilerfremd hierin angenommen. Beide seien nicht identisch Null und mindestens eines vom genauen Grad m in der Funktion $F(z)$.

Aus der Funktionalgleichung ergibt sich die Fortsetzbarkeit von $F(z)$ in das Innere von $\mathfrak{U}$. Aus ihr lassen sich ferner die folgenden Approximationen herleiten.

4. Um diese Entwicklungen möglichst einfach zu gestalten, benutzen wir an Stelle der einen Funktion $F(z)$ zwei hypothetische Funktionen

$$f(z), \quad g(z),$$

die den Funktionalgleichungen

$$f(\Omega z) = \sum_{l=0}^{m} a_l(z)\, f(z)^l\, g(z)^{m-l},$$

$$g(\Omega z) = \sum_{l=0}^{m} b_l(z)\, f(z)^l\, g(z)^{m-l}$$

in homogener Gestalt genügen. Ob es zwei solche Funktionen analytischen Charakters gibt, sei dahingestellt und ist auch für die folgenden algebraischen Betrachtungen unwesentlich. Es sei $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ angenommen.

Nach den vorigen Funktionalgleichungen lassen sich $f(\Omega^k z)$ und $g(\Omega^k z)$ durch $f(z)$ und $g(z)$ ausdrücken. Offenbar erhält man

$$f(\Omega^k z) = \sum_{l=0}^{m^k} a_l^{(k)}(z)\, f(z)^l\, g(z)^{m^k-l},$$

$$g(\Omega^k z) = \sum_{l=0}^{m^k} b_l^{(k)}(z)\, f(z)^l\, g(z)^{m^k-l},$$

wobei $a_l^{(k)}(z)$ und $b_l^{(k)}(z)$ wieder Polynome mit Koeffizienten aus $I(s)$ sind. Um für diese Polynome Majoranten anzugeben, sei zur Abkürzung

$$\mathfrak{F}(z) = \prod_{\alpha=1}^{n} (1 + z_\alpha)$$

gesetzt. Wenn die eckige Klammer das größte Ganze bedeutet, ist

$$\mathfrak{F}(\Omega^k z) \ll \mathfrak{F}(z)^{[c_2 \varrho_1^k]} \quad \text{für } k \geqq 0.$$

Es existieren drei natürliche Zahlen M_1, M_2, M_3, so daß

$$a_l(z),\ b_l(z) \ll \frac{M_1}{2} (1+s)^{M_2} \mathfrak{F}(z)^{M_3}$$

und daher in leichtverständlicher Bezeichnung

$$f(\Omega z),\ g(\Omega z) \ll \frac{M_1}{2} (1+s)^{M_2} \mathfrak{F}(z)^{M_3} \{f(z) + g(z)\}^m$$

ist. Allgemeiner gelten die Formeln

$$f(\Omega^k z),\ g(\Omega^k z)$$
$$\ll \frac{1}{2} M_1^{m_k} (1+s)^{M_2 m_k} \{\mathfrak{F}(\Omega^{k-1} z)\, \mathfrak{F}(\Omega^{k-2} z)^m \ldots \mathfrak{F}(z)^{m^{k-1}}\}^{M_3} \{f(z) + g(z)\}^{m^k},$$

wie man durch Schluß von k auf $k+1$ zeigt. Dabei bedeutet

$$m_k = 1 + m + \ldots + m^{k-1}.$$

Jetzt ist

$$\mathfrak{F}(\Omega^{k-1} z)\, \mathfrak{F}(\Omega^{k-2} z)^m \ldots \mathfrak{F}(z)^{m^{k-1}} \ll \mathfrak{F}(z)^{[c_2 (\varrho_1^{k-1} + m \varrho_1^{k-2} + \ldots + m^{k-1})]}.$$

Ferner besteht *wegen der Annahme* $m < \varrho_1$ die Ungleichung

$$M_3 [c_2 (\varrho^{k-1} + m \varrho^{k-2} + \ldots + m^{k-1})] \leqq [c_3 \varrho_1^k].$$

Man gelangt also zu folgenden Majoranten:

$$f(\Omega^k z),\ g(\Omega^k z) \ll \frac{1}{2} M_1^{m_k} (1+s)^{M_2 m_k} \cdot \mathfrak{F}(z)^{[c_3 \varrho_1^k]} \{f(z) + g(z)\}^{m^k}.$$

Wegen

$$F(\Omega^k z) = \frac{\sum\limits_{=0}^{m^k} a_l^{(k)}(z)\, F(z)^l}{\sum\limits_{l=0}^{m^k} b_l^{(k)}(z)\, F(z)^l} = \frac{f(\Omega^k z)}{g(\Omega^k z)}$$

sind damit auch für Zähler und Nenner von $F(\Omega^k z)$ Majoranten bestimmt.

5. Auch für $E_p(\Omega^k z)$ als Funktion von $F(z)$ lassen sich Majoranten angeben. Sei zur Abkürzung

$$\mathfrak{E}_p^{(k)}(z) = \Big(\sum_{l=0}^{m^k} b_l^{(k)}(z)\, F(z)^l\Big)^p E_p(\Omega^k z) = \sum_{l=0}^{p m^k} \mathfrak{B}_l^{(k)}(z)\, F(z)^l.$$

Die Funktionen $\mathfrak{B}_l^{(k)}(z)$ sind Polynome in den z mit Koeffizienten aus $I(s)$. Mit zwei allein von p abhängigen natürlichen Zahlen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2$ ist

$$\mathfrak{A}_h(z) \ll \mathsf{M}_1 (1+s)^{\mathsf{M}_2} \mathfrak{F}(z)^p, \qquad \mathfrak{A}_h(\Omega^k z) \ll \mathsf{M}_1 (1+s)^{\mathsf{M}_2} \mathfrak{F}(z)^{p[c_2 \varrho_1^k]}.$$

Folglich wird

$$\mathfrak{E}_p^{(k)}(z) \ll \mathsf{M}_1 (1+s)^{\mathsf{M}_2} \mathfrak{F}(z)^{p[c_2 \varrho_1^k]}$$
$$\times \left(\frac{1}{2}\right)^p M_1^{p m_k} (1+s)^{p M_2 m_k} \mathfrak{F}(z)^{p[c_3 \varrho_1^k]} \{1+F(z)\}^{p m^k}$$

oder endlich

$$\mathfrak{E}_p^{(k)}(z) \ll \frac{\mathsf{M}_1}{2^p} M_1^{p m_k} (1+s)^{\mathsf{M}_2 + p M_2 m_k} \mathfrak{F}(z)^{p[c_4 \varrho_1^k]} \{1+F(z)\}^{p m^k}.$$

6. Da nach früher die beiden Formen in u und v

$$P(uv \mid z) = \sum_0^m a_l(z) u^l v^{m-l},$$

$$Q(uv \mid z) = \sum_0^m b_l(z) u^l v^{m-l}$$

keinen gemeinsamen Teiler besitzen, der u oder v enthält, so ist ihre Resultante in bezug auf diese Veränderliche gewiß nicht identisch Null und also gleich einem Polynom in den z:

$$\Delta(z).$$

In jedem Punkt, wo $\Delta(z)$ verschwindet, haben die beiden Formen

$$P(uv \mid z), \qquad Q(uv \mid z)$$

einen Linearfaktor $Uu + Vv$ mit zwei von z abhängigen Konstanten U und V gemein.

Die Punkte, in denen eine der Gleichungen

$$\Delta(\Omega^k z) = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

erfüllt ist, seien singulär, alle anderen regulär genannt; $\mathfrak{u}$ bedeute die Menge der regulären Punkte in $\mathfrak{U}$.

7. Die zwei Transformationen

$$u' = \sum_0^r A_l u^l v^{r-l},$$

$$v' = \sum_0^r B_l u^l v^{r-l}$$

und

$$u'' = \sum_0^s \mathfrak{A}_l u'^l v'^{s-l},$$

$$v'' = \sum_0^s \mathfrak{B}_l u'^l v'^{s-l}$$

mögen, nacheinander angewandt, die Transformation

$$u'' = \sum_0^{rs} \mathsf{A}_l u^l v^{rs-l},$$

$$v'' = \sum_0^{rs} \mathsf{B}_l u^l v^{rs-l}$$

ergeben.

Bei der ersten Transformation gehören zu den Werten

$$u' = v' = 0$$

in jedem Fall die trivialen Lösungen

$$u = v = 0,$$

andere nur dann, wenn die Resultante der Formen

$$\sum_0^{r} A_l u^l v^{r-l}, \qquad \sum_0^{r} B_l u^l v^{r-l}$$

gleich Null ist.

Ebenso gehören bei der zweiten Transformation zu

$$u'' = v'' = 0$$

in jedem Fall die Lösungen

$$u' = v' = 0,$$

andere nur dann, wenn die Resultante der Formen

$$\sum_0^{s} \mathfrak{A}_l u'^l v'^{s-l}, \qquad \sum_0^{s} \mathfrak{B}_l u'^l v'^{s-l}$$

verschwindet.

Somit besitzen in der zusammengesetzten Transformation die Werte

$$u'' = v'' = 0$$

außer der trivialen Lösung

$$u = v = 0$$

eine weitere Lösung dann und nur dann, wenn entweder die Resultante der ersten oder die der zweiten Transformation oder beide verschwinden.

Dies Ergebnis werde auf die Resultante der beiden Formen

$$P^{(k)}(uv\,|\,z) = \sum_0^{m^k} a_l^{(k)}(z)\, u^l v^{m^k-l},$$

$$Q^{(k)}(uv\,|\,z) = \sum_0^{m^k} b_l^{(k)}(z)\, u^l v^{m^k-l}$$

angewandt. Nach 4. entsteht die Transformation

$$u'' = P^{(k)}(uv\,|\,z),$$

$$v'' = Q^{(k)}(uv\,|\,z)$$

durch Zusammensetzung der beiden Transformationen

$$u'' = P^{(k-1)}(u' v' \mid \Omega z),$$
$$v'' = Q^{(k-1)}(u' v' \mid \Omega z)$$

und

$$u' = P^{(1)}(u v \mid z),$$
$$v' = Q^{(1)}(u v \mid z).$$

Also folgt durch Schluß von k auf $k+1$, daß die Resultante der beiden Formen

$$P^{(k)}(u, v \mid z), \qquad Q^{(k)}(u, v \mid z)$$

allein die Faktoren

$$\Delta(z), \ \Delta(\Omega z), \ \ldots, \ \Delta(\Omega^{k-1} z)$$

zuläßt, und daraus weiter:

Satz 4. *In mindest einem (tatsächlich in unendlich vielen) der Brüche*

$$F(\Omega^k z) = \frac{\sum\limits_0^{m^k} a_l^{(k)}(z) F(z)^l}{\sum\limits_0^{m^k} b_l^{(k)}(z) F(z)^l}$$

verschwinden nur dann gleichzeitig Zähler und Nenner für einen geeigneten Wert von $F(z)$ oder tritt nur dann gleichzeitig Graderniedrigung in $F(z)$ ein, wenn z ein singulärer Punkt ist. Ist z ein regulärer Punkt, so ist für jedes natürliche k mindestens eines der Polynome

$$\sum_0^{m^k} a_l^{(k)}(z) U^l, \qquad \sum_0^{m^k} b_l^{(k)}(z) U^l$$

immer von Null verschieden und auch mindestens eines genau vom Grad m in U.

8. Der Punkt z liege von jetzt ab in $\mathfrak{u}$. Ferner sei der Funktionswert $F(z)$ endlich. Da die Komponenten von $z' = \Omega^k z$ gegen Null streben, so ist von einem k ab gewiß $F(\Omega^k z)$ beschränkt. In der Gleichung

$$F(\Omega^k z) = \frac{\sum\limits_0^{m^k} a_l^{(k)}(z) F(z)^l}{\sum\limits_0^{m^k} b_l^{(k)}(z) F(z)^l}$$

ist aber Zähler und Nenner der rechten Seite nicht gleichzeitig Null, folglich der Nenner

$$G^{(k)}(z) = \sum_0^{m^k} b_l^{(k)}(z) F(z)^l$$

endlich und von Null verschieden. Da z_α, $F(z)$, s endliche Konstante sind, so ist nach den Majoranten in 4.:

$$0 < |G^{(k)}(z)| \leqq e^{c_5 \varrho_1^k} \quad \text{für} \quad k \geqq k_1$$

und nach der Ungleichung in 3.:

$$0 < |\mathfrak{E}_p^{(k)}(z)| \leqq \gamma_0 \, e^{\left(c_4 p - \gamma_1 p^{1+\frac{1}{n}}\right)\varrho_1^k} \quad \text{für} \quad k \geqq k_2$$

oder für $p > \left(\frac{2 c_5}{c_1}\right)^n$

$$0 < |\mathfrak{E}_p^{(k)}(z)| \leqq e^{-\frac{\gamma_1}{2} p^{1+\frac{1}{n}} \varrho_1^k} \quad \text{für} \quad k \geqq k_3 .$$

Damit ist bewiesen:

Satz 5. *Die Funktion*

$$\mathfrak{E}_p^{(k)}(z) = (G^{(k)}(z))^p \, E_p(\Omega^k z) = \sum_{l=0}^{p m^k} \mathfrak{B}_l^{(k)}(z) \, F(z)^l$$

mit der Majorante

$$\mathfrak{E}_p^{(k)}(z) \ll \frac{\mathsf{M}_1}{2^p} M_1^{p m_k} (1+s)^{\mathsf{M}_2 + p M_2 m_k} \, \mathfrak{F}(z)^{p[c_4 \varrho_1^k]} \{1 + F(z)\}^{p m^k}, \quad m_k = \sum_0^{k-1} m^k$$

befriedigt in dem festen Punkt z in $\mathfrak{u}$ die Ungleichung

$$0 < |\mathfrak{E}_p^{(k)}(z)| \leqq e^{\gamma_2 p^{1+\frac{1}{n}}}, \qquad \gamma_2 \geqq c_6 \quad \text{für} \quad p \geqq c_7, \; k \geqq k_4 .$$

III.

1. Folgende Annahmen seien gemacht:

a) Die Koeffizienten $A_{h_1 \ldots h_n}$ liegen im gleichen endlichen algebraischen Zahlkörper.

b) Die Koeffizienten der Polynome $a_l(z)$, $b_l(z)$ sind algebraisch.

c) Die Komponenten des Punktes z in $\mathfrak{u}$ sind algebraisch.

d) Der Funktionswert $F(z)$ ist algebraisch und endlich.

Indem man zu einem geeigneten Oberkörper übergeht, läßt sich eine gebrochene algebraische Zahl s vom Grad ν bestimmen, so daß die $A_{h_1 \ldots h_n}$ in $K(s)$, die Koeffizienten der Polynome $a_l(z)$, $b_l(z)$ in $I(s)$ liegen, ferner

$$z_\alpha = \sum_{\tau=1}^{\nu} d_{\alpha\tau} s^\tau, \qquad F(z) = \sum_{\tau=1}^{\nu} d_\tau s^\tau$$

wird, wo die $d_{\alpha\tau}$, d_τ ganze rationale Zahlen absolut höchstens gleich der natürlichen Zahl d sind.

Infolgedessen ist

$$z_\alpha \ll d(1+s)^\nu, \qquad F(z) \ll d(1+s)^\nu,$$

$$\mathfrak{F}(z) \ll (2d)^n \cdot (1+s)^{\nu n},$$

$$1 + F(z) \ll (2d) \cdot (1+s)^\nu,$$

$$\mathfrak{E}_p^{(k)}(z) \ll \frac{\mathsf{M}_1}{2^p} M_1^{p m_k} (2d)^{np[c_4 \varrho_1^k] + p m^k} (1+s)^{\mathsf{M}_2 + p M_2 m_k + p\nu n [c_4 \varrho_1^k] + p \nu m^k}.$$

Dabei bedeutet

$$Q \ll \sum_0^P q_\tau s^\tau,$$

daß sich Q in der Form

$$Q = \sum_0^P \mathfrak{q}_\tau s^\tau, \qquad |\mathfrak{q}_\tau| \leqq q_\tau$$

darstellen läßt, wo die $\mathfrak{q}_\tau$ ganze rationale Zahlen sind.

Es ist folglich

$$\mathfrak{E}_p^{(k)}(z) \ll e^{c_8 p \varrho_1^k} (1+s)^{[c_9 p \varrho_1^k]} \quad \text{für} \quad k \geqq k_5$$

und erst recht

$$\mathfrak{E}_p^{(k)}(z) \ll e^{c_{10} p \varrho_1^k} \sum_{\tau=0}^{P} s^\tau; \qquad P = [c_{11} p \varrho_1^k] \quad \text{für} \quad k \geqq k_6.$$

2. In dem Ausdruck

$$\mathfrak{E} = \sum_{\tau=0}^{P} C_\tau s^\tau \neq 0, \qquad C = \max_{\tau=0,\ldots,P} (|C_\tau|),$$

seien die C_τ ganze rationale Zahlen und es seien

$$s_0 = s,\ s_1,\ \ldots,\ s_{\nu-1}$$

die zu s Konjugierten. Die Zahl

$$\mathsf{E} = \mathfrak{E} \cdot \prod_{\sigma=1}^{\nu-1} \left\{ \sum_{\tau=0}^{P} C_\tau s_\sigma^\tau \right\}$$

ist offenbar rational und von Null verschieden. Bedeutet S den Nenner von s, so besteht die Ungleichung

$$|\mathfrak{E}| \geqq S^{-P\nu} \cdot C^{-(\nu-1)} \cdot \left\{ \prod_{\sigma=1}^{\nu-1} \left(\sum_{\tau=0}^{P} |s_\tau| \right) \right\} \geqq e^{-c_{12} P}\, C^{-(\nu-1)}$$

mit einer Konstanten c_{12}, die allein von s abhängt[6]).

[6]) Diese Abschätzung ist eine triviale Verallgemeinerung der bekannten Ungleichung von Liouville für algebraische Zahlen: „Sur les classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques.“ Journ. de math. (1) **16**, 133.

Die letzte Ungleichung auf

$$0 \neq \mathfrak{E}_p^{(k)}(z) \ll e^{c_{10} p \varrho_1^k} \sum_0^P s^\tau; \qquad P = [c_{11} p \varrho_1^k]$$

angewandt, ergibt die Ungleichung

$$|\mathfrak{E}_p^{(k)}(z)| \geqq e^{-c_{13} p \varrho_1^k} \quad \text{für} \quad k \geqq k_7.$$

Andererseits ist aber

$$|\mathfrak{E}_p^{(k)}(z)| \leqq e^{-c_6 p^{1+\frac{1}{n}} \varrho_1^k} \quad \text{für} \quad p \geqq c_7, \quad k \geqq k_4,$$

so daß man für

$$p \geqq c_7, \qquad p \geqq \left(\frac{2 c_{13}}{c_6}\right)^n, \qquad k \geqq k_4, \quad k \geqq k_7$$

zu einem Widerspruch gelangt.

Man gelangt also zu der Alternative, daß entweder $F(z)$ gleich einer transzendenten Zahl oder unendlich groß ist. Der zweite Teil dieser Alternative ist aber ausgeschlossen.

Denn offenbar genügt $\Omega^k z$ den gleichen Bedingungen wie z selbst. Für genügend großes k ist aber $F(\Omega^k z)$ endlich und folglich gleich einer transzendenten Zahl. Bedeutet $\mathfrak{z}$ einen veränderlichen Punkt, so besteht die Identität

$$\sum_0^{m^k} \{a_l^{(k)}(\mathfrak{z}) - b_l^{(k)}(\mathfrak{z}) F(\Omega^k \mathfrak{z})\} F(\mathfrak{z})^l = 0.$$

Nach früher verschwinden die beiden Zahlen

$$a_{m^k}^{(k)}(z), \qquad b_{m^k}^{(k)}(z)$$

nicht gleichzeitig; sie haben einen algebraischen Wert. Daher ist

$$a_{m^k}^{(k)}(z) - b_{m^k}^{(k)}(z) F(\Omega^k z) \neq 0$$

und die Funktion

$$a_{m^k}^{(k)}(\mathfrak{z}) - b_{m^k}^{(k)}(\mathfrak{z}) F(\Omega^k \mathfrak{z})$$

auch noch in einer genügend kleinen Umgebung von z von Null verschieden. Nach bekannten Sätzen über die Lösungen algebraischer Gleichungen ist daher die Funktion $F(\mathfrak{z})$ in dieser Umgebung beschränkt und speziell ist $F(z)$ endlich. Die besondere Annahme der Endlichkeit von $F(z)$ ist somit überflüssig.

Damit hat man folgenden Satz bewiesen:

Satz 6. *Wenn die Koeffizienten $A_{h_1 \ldots h_n}$ in einem endlichen algebraischen Zahlkörper liegen, wenn die Koeffizienten der Polynome $a_l(z)$, $b_l(z)$ algebraisch sind und wenn z ein Punkt in $\mathfrak{u}$ mit algebraischen Komponenten ist, so stellt $F(z)$ eine endliche und transzendente Zahl dar.*

Im Falle $m=1$ gelingt es leicht, genauere Eigenschaften dieser Zahl zu beweisen, z. B. *daß sie nicht gleich einer Liouvilleschen Transzendenten ist.*

3. Der vorige Transzendenzsatz betrifft nur die Punkte im Innern von $\mathfrak{u}$. Außerhalb dieser Punktmenge besteht auch kein allgemeiner Satz.

Wenn erstens z außerhalb von

$$\Re(\Lambda)<0$$

liegt, so braucht die Funktion $F(z)$ nicht zu existieren, denn es gibt einfache Beispiele, die den Rand dieser Punktmenge zur natürlichen Grenze haben.

Wenn zweitens zwar

$$\Re(\Lambda)<0$$

ist, aber mindestens eine der Komponenten von z verschwindet, so hat $F(z)$ einen algebraischen Wert. Denn es existiert eine natürliche Zahl k, so daß alle Komponenten von $\Omega^k z$ gleich Null sind. Also ist

$$F(\Omega^k z)=A_{0\ldots 0}$$

und folglich $F(z)$ als Wurzel einer algebraischen Gleichung mit algebraischen Koeffizienten selbst algebraisch.

Wenn endlich drittens z ein singulärer Punkt im Innern von $\mathfrak{U}$ ist, so scheint es schwierig, eine allgemeine Aussage zu machen. In folgendem Fall gelingt dies aber:

Im Punkte z, der also in $\mathfrak{U}$ und nicht in $\mathfrak{u}$ liegt, sei mindestens eines der Polynome $a_l(z)$, $b_l(z)$ von Null verschieden. Ferner gelte die Identität

$$a_0(z):a_1(z):\ldots:a_m(z)=b_0(z):b_1(z):\ldots:b_m(z),$$

so daß die Polynome in u

$$\sum_{l=0}^{m}a_l(z)\,u^l,\qquad \sum_{l=0}^{m}b_l(z)\,u^l$$

alle Wurzeln und nicht nur eine gemein haben. In diesem Fall ist $F(z)$ gleich einer algebraischen Zahl. Denn da $\Delta(z)$ nicht identisch verschwindet, so gibt es eine natürliche Zahl k, so daß

$$\Delta(\Omega^K z)\neq 0 \qquad (K=k,\,k+1,\ldots)$$

ist; nach Satz 6 ist daher $F(\Omega^k z)$ transzendent. Wenn jetzt aber $F(z)$ nicht den Gleichungen

$$\sum_{l=0}^{m}a_l(z)\,F(z)^l=\sum_{0}^{m}b_l(z)\,F(z)^l=0$$

genügte, so wäre der Quotient

$$F(\Omega z) = \frac{\sum_{0}^{m} a_l(z)\, F(z)^l}{\sum_{0}^{m} b_l(z)\, F(z)^l}$$

und damit auch $F(\Omega^k z)$ algebraisch, was falsch ist.

Der letzte Spezialfall tritt stets ein, wenn $m = 1$ ist und mindestens eines der Polynome

$$a_0(z),\ a_1(z),\ b_0(z),\ b_1(z)$$

im singulären Punkt z nicht verschwindet. Wenn endlich auch noch $n = 1$ ist, so wird auch die letzte Einschränkung überflüssig und also, falls $z \neq 0$ eine algebraische Zahl im Einheitskreis bedeutet,

$$\begin{aligned} &F(z) \text{ transzendent, wenn } z \text{ regulär,} \\ &F(z) \text{ algebraisch, wenn } z \text{ singulär} \end{aligned}$$

ist.

IV.

1. Aus Satz 6 läßt sich für beliebig viele Funktionen die Transzendenz unmittelbar folgern. Sei z. B. jeder Koeffizient in der im Körper der rationalen Zahlen irreduziblen Gleichung

$$\varrho^n + c_1 \varrho^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

außer dem der Potenz ϱ^n nichtpositiv und ganz rational. Die positive Wurzel ϱ_1 der Gleichung sei größer als der absolute Betrag der anderen Wurzeln. Wenn dann durch

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1; \qquad a_{n+h} + c_1 a_{n+h-1} + \dots + x_n a_h = 0$$

eine rekurrierende Reihe definiert wird, so genügt die Funktion

$$F(z) = \sum_{h=1}^{\infty} z_1^{a_h} z_2^{a_{h+1}} \dots z_n^{a_{h+n-1}}$$

den Anforderungen des Satzes 6. Denn mit

$$\Omega = \begin{pmatrix} -c_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

besteht die Funktionalgleichung

$$F(\Omega z) = F(z) - z_1 z_2 \dots z_n .$$

Ferner ist $F(z)$ gewiß transzendent, ja sogar nicht über den Rand des Gebietes

$$\Re(\log z_1 + \varrho_1 \log z_2 + \ldots + \varrho_1^{n-1} \log z_n) < 0$$

fortsetzbar. Wenn also der Punkt z im Innern dieses Gebietes nicht verschwindende algebraische Komponenten besitzt, so stellt $F(z)$ eine transzendente Zahl dar.

Als ein weiteres und noch einfacheres Beispiel sei das Produkt

$$F_1(z) = \prod_0^\infty (1 - z^{2^n})$$

erwähnt. Während diese Funktion transzendent ist, stellt die ganz ähnliche Formel

$$F_2(z) = \prod_0^\infty (1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}$$

eine algebraische Funktion dar. Wenn $z \neq 0$ eine algebraische Zahl im Innern des Einheitskreises ist, so stellt also die erste Reihe eine transzendente, die zweite eine algebraische Zahl dar.

2. Es soll zum Schluß gezeigt werden, daß sich auch die Reihe

$$\sum_{h=1}^\infty [h\omega] z^h,$$

wo die eckige Klammer das größte Ganze bedeutet und ω eine quadratische Irrationalität ist, dem Satz 6 unterwirft.

Sei ω eine positive Irrationalzahl und

$$F_\omega(z_1 z_2) = \sum_{h_1=1}^\infty \sum_{h_2=1}^{[h_1\omega]} z_1^{h_1} z_2^{h_2}.$$

Sind h_1, h_2 zwei natürliche Zahlen, so ist entweder

$$1 \leqq h_2 < \omega h_1 \quad \text{oder} \quad 1 \leqq h_1 < \frac{1}{\omega} h_2.$$

Daher besteht die Identität

$$F_\omega(z_1 z_2) + F_{\frac{1}{\omega}}(z_2 z_1) = \frac{z_1 z_2}{(1-z_1)(1-z_2)}.$$

Wenn ferner a eine natürliche Zahl bedeutet, so hat man

$$F_{a+\omega}(z_1 z_2) = \sum_{h_1=1}^\infty \left\{ z_1^{h_1} \sum_{h_2=1}^{a h_1} z_2^{h_2} + (z_1 z_2^a)^{h_1} \sum_{h_2=1}^{[h_1\omega]} z_2^{h_2} \right\}$$

$$= \sum_{h_1=1}^\infty z_1^{h_1} \frac{z_2 - z_2^{a h_1 + 1}}{1 - z_2} + F_\omega(z_1 z_2^a, z_2)$$

und also

$$F_{a+\omega}(z_1 z_2) = \frac{z_1 z_2}{(1-z_1)(1-z_2)} - \frac{z_1 z_2^{a+1}}{(1-z_2)(1-z_1 z_2^a)} + F_\omega(z_1 z_2^a, z_2).$$

Beide Formeln zusammen ergeben die Funktionalgleichung

$$F_{\frac{1}{a+\omega}}(z_1 z_2) = \frac{z_1^{a+1} z_2}{(1-z_1)(1-z_1^a)} - F_\omega(z_1^a z_2, z_1).$$

Jetzt besitze ω den Kettenbruch

$$\omega = \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \frac{1|}{|a_3} + \ldots; \quad \omega = \frac{1}{a_1+\omega_1}, \ \omega_1 = \frac{1}{a_2+\omega_2}, \ \omega_2 = \frac{1}{a_3+\omega_3}, \ldots;$$

ω sei also ein echter Bruch. Mit den Näherungsnennern und -zählern

$$p_{-1} = 0, \quad p_0 = 1, \quad p_1 = a_1, \quad p_{\mu+1} = a_{\mu+1} p_\mu + p_{\mu-1},$$
$$q_{-1} = 1, \quad q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_{\mu+1} = a_{\mu+1} q_\mu + q_{\mu-1}$$

besteht die Funktionalgleichung

$$F_\omega(z_1 z_2) = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (-1)^\mu \frac{z_1^{p_{\mu+1}+p_\mu} z_2^{q_{\mu+1}+q_\mu}}{(1-z_1^{p_{\mu+1}} z_2^{q_{\mu+1}})(1-z_1^{p_\mu} z_2^{q_\mu})}$$
$$+ (-1)^\nu F_{\omega_\nu}(z_1^{p_\nu} z_2^{q_\nu}, z_1^{p_{\nu-1}} z_2^{q_{\nu-1}}).$$

Für $\nu = \infty$ folgt hieraus

$$F_\omega(z_1 z_2) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{z_1^{p_{\mu+1}+p_\mu} z_2^{q_{\mu+1}+q_\mu}}{(1-z_1^{p_{\mu+1}} z_2^{q_{\mu+1}})(1-z_1^{p_\mu} z_2^{q_\mu})}$$

und für $z_2 = 1$ ergibt sich die „Lambertsche“ Reihe [7])

$$F_\omega(z, 1) = \sum_{h=1}^{\infty} [h\omega] z^h = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{z^{p_{\mu+1}+p_\mu}}{(1-z^{p_{\mu+1}})(1-z^{p_\mu})}.$$

Den letzten Formeln entnimmt man die Existenz von $F_\omega(z_1 z_2)$ im Innern der Punktmenge

$$\Re(\log z_1 + \omega \log z_2) < 0.$$

Offenbar ist $F_\omega(z_1 z_2)$ keine algebraische Funktion in den beiden Veränderlichen, denn bekanntlich ist sogar $F_\omega(z, 1)$ nicht über den Einheitskreis fortsetzbar. — Zur Abkürzung bedeute $\mathfrak{u}$ die Punktmenge

$$\Re(\log z_1 + \omega \log z_2) < 0; \qquad z_1 z_2 \neq 0; \qquad z_1^{p_\mu} z_2^{q_\mu} \neq 1 \quad \text{für} \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots.$$

---

[7]) Wegen dieser Entwicklungen vergleiche: Hardy-Littlewood, The analytic character of the sum of a Dirichlet's series considered by Hecke, Hamb. Abh. **3** 57, sowie die später genannte Arbeit von Böhmer.

3. Der Kettenbruch von ω werde nunmehr rein periodisch angenommen:

$$\omega = \omega_\nu ,$$

so daß ω eine quadratische Irrationalzahl ist. Es besteht die Gleichung

$$\omega = \frac{q_\nu + q_{\nu-1}\,\omega}{p_\nu + p_{\nu-1}\,\omega}.$$

Zu der Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} p_\nu & q_\nu \\ p_{\nu-1} & q_{\nu-1} \end{pmatrix}$$

gehört die charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) \equiv (p_\nu - \varrho)(q_{\nu-1} - \varrho) - p_{\nu-1} q_\nu = 0$$

mit den Wurzeln

$$\varrho_1 = p_\nu + p_{\nu-1}\,\omega, \quad \varrho_2 = q_{\nu-1} - p_{\nu-1}\,\omega; \qquad \varrho_1 > |\varrho_2|.$$

Die Gleichung ist im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel und ihre Wurzeln genügen den früheren Forderungen. Wegen der Funktionalgleichung

$$F_\omega(z_1 z_2) = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (-1)^\mu \frac{z_1^{p_{\mu+1}+p_\mu} z_2^{q_{\mu+1}+q_\mu}}{(1 - z_1^{p_{\mu+1}} z_2^{q_{\mu+1}})(1 - z_1^{p_\mu} z_2^{q_\mu})}$$
$$+ (-1)^\nu F_\omega(z_1^{p_\nu} z_2^{q_\nu}, z_1^{p_{\nu-1}} z_2^{q_{\nu-1}})$$

folgt also nach Satz 6: „Wenn der Punkt (z_1, z_2) mit algebraischen Komponenten in $\mathfrak{u}$ liegt, so ist die Zahl $F_\omega(z_1 z_2)$ transzendent."

Bekanntlich besitzt aber jede reelle quadratische Irrationalzahl einen periodischen Kettenbruch; durch eine einfache Überlegung folgt daher:

„*Bedeutet ω eine positive quadratische Irrationalität, so stellt die Funkiton*

$$F_\omega(z_1 z_2) = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{[\omega h_1]} z_1^{h_1} z_2^{h_2}$$

in allen Punkten (z_1, z_2) mit algebraischen Komponenten in $\mathfrak{u}$ eine transzendente Zahl dar. Die Reihe

$$F_\omega(z, 1) = \sum_{h=1}^{\infty} [h\omega] z^h$$

ist somit für algebraisches z mit $0 < |z| < 1$ gleich einer transzendenten Zahl." (Es handet sich sogar um nicht-Liouvillesche Zahlen.)

Mit einem abgeänderten Verfahren läßt sich die Transzendenz auch noch beweisen, wenn ω eine beliebige Irrationalzahl ist.

Man vergleiche zu diesem Abschnitt die Arbeit von P. E. Böhmer, „Über die Transzendenz gewisser dyadischer Brüche“. Math. Annalen **96**. Dort wird gezeigt, daß die Zahlen

$$F_\omega\left(\frac{1}{g}, 1\right) \qquad (g = 2, 3, 4, \ldots)$$

Liouvillesch sind, wenn die Kettenbruchnenner a_μ nicht beschränkt sind.

Krefeld, 5. Mai 1928.

(Eingegangen am 25. 7. 1928.)