MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

Sonderabdruck aus Band 101, Heft 2 und 3.

Kurt Mahler

Über die Nullstellen der Abschnitte der hypergeometrischen Reihe.

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1929

Sonderdruck aus Mathematische Annalen, Band 101 Heft 2/3.

Über die Nullstellen der Abschnitte der hypergeometrischen Reihe.

Von

Kurt Mahler in Krefeld.

In der folgenden Arbeit sollen asymptotische Formeln für die Nullstellen der Abschnitte

$$P_n(z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z + \ldots + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-2)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-2)}{1 \cdot 2 \quad \ldots \quad (n-1) \quad \gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-2)} z^{n-1}$$

der hypergeometrischen Reihe

$$f(z) = F(\alpha\beta\gamma z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\,\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \quad \gamma(\gamma+1)} z^2 + \ldots;$$

$$\alpha, \beta, \gamma \neq 0, \ -1, \ -2, \ldots$$

$$\alpha + \beta - \gamma \neq 0, \ \mp 1, \ \mp 2, \ldots$$

nach einem Verfahren hergeleitet werden, das ich bei der Untersuchung der Nullstellen der unvollständigen Gammafunktionen benutzt habe[5]). Aus diesen asymptotischen Formeln folgt, daß für $n \to \infty$ die Nullstellen der Abschnitte $P_n(z)$ sich dicht gegen jeden Punkt des Einheitskreises häufen, wie es der Jentzschsche Satz verlangt.

Der Beweis verläuft folgendermaßen:

Die Funktion

$$Q_n(z) = f(z) - P_n(z)$$

besitzt nach dem Cauchyschen Integralsatz die Darstellung

$$Q_n(z) = \frac{z^n}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z} - z)\,\mathfrak{z}^n}\, d\mathfrak{z}.$$

Wenn n genügend groß ist, darf für den Integrationsweg $\mathfrak{C}$ eine Kurve gewählt werden, die aus dem Unendlichen kommt, den Punkt $\mathfrak{z} = 1$ in negativer Richtung umkreist und wieder ins Unendliche läuft. Vermöge der bekannten Gaußschen Identität

$$f(z)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\,F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-z)$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}\,F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-z)$$

ist damit gleichwertig

$$Q_n(z)=\frac{z^n}{2\pi i}\,\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_{\mathfrak{C}}(1-\mathfrak{z})^{\gamma-\alpha-\beta}\,\frac{F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}-z)\,\mathfrak{z}^n}\,d\mathfrak{z}.$$

Aus diesem Integral läßt sich durch Entwicklung des Ausdrucks

$$\frac{F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-\mathfrak{z})}{\mathfrak{z}-z}$$

nach Potenzen von $1-\mathfrak{z}$ und Abbrechen beim k-ten Glied mit Restabschätzung eine asymptotische Formel für $Q_n(z)$, $n\to\infty$, herleiten, wenn z auf den Bereich $\mathfrak{E}(\varepsilon)$:

$$|z|\leqq\frac{1}{\varepsilon},\qquad |z-t|\geqq 2\varepsilon\quad\text{für}\quad t\geqq 1,\qquad \varepsilon>0\text{ und konstant,}$$

beschränkt wird. Im einfachsten Fall lautet sie

$$Q_n(z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,n^{\alpha+\beta-\gamma-1}\,\frac{z^n}{1-z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Jetzt genügen die Nullstellen von $P_n(z)$ der Gleichung

$$f(z)=Q_n(z)$$

und wenn die vorige Reihe und die bekannte Lagrangesche Umkehrformel benutzt werden, ergibt sich für die Nullstellen z im Innern von $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ eine asymptotische Reihe; die ersten Glieder sind

$$z=\omega\left\{1-\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}\log n+\frac{1}{n}\log\left[\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}(1-\omega)f(\omega)\right]\right\}+O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right).$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ den Bereich, der aus $\mathfrak{E}(\varepsilon)$ entsteht, wenn um jeder der endlich vielen Nullstellen von $f(z)$ hierin ein Kreis vom Radius ε entfernt wird; ω hingegen eine n-te Einheitswurzel auf dem Bogen des Einheitskreises

$$3\varepsilon\leqq|\operatorname{arc}\omega|\leqq\pi,\qquad \omega\ \text{ in }\ \mathfrak{H}(\varepsilon).$$

Der vorigen Formel entnimmt man alle Behauptungen.

I.

1. Sei $\mathfrak{E}$ die z-Ebene mit einem Schnitt $\mathfrak{S}$ längs der reellen Achse zwischen 1 und $+\infty$, $\mathfrak{E}^*$ dieselbe Ebene mit einem weiteren Schnitt $\mathfrak{S}^*$

längs der reellen Achse zwischen $-\infty$ und 0. Die hypergeometrische Reihe

$$f(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots$$

$$(\alpha, \beta, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots)$$

läßt sich ins Innere von $\mathfrak{C}$ als reguläre, eindeutige und nicht ganz-rationale Funktion fortsetzen; sie hat singuläre Stellen höchstens in den Randpunkten $z = 1$ und $z = \infty$. Am Schnitt $\mathfrak{S}$ besitzt $f(z)$ im allgemeinen einen Sprung.

Als wesentliche Einschränkung sei

$$\alpha + \beta - \gamma \neq 0, \mp 1, \mp 2, \dots$$

angenommen; alsdann besteht die Gaußsche Identität[1])

$$f(z) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z)$$

$$+ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z).$$

Die Summanden auf der rechten Seite sind im Innern von $\mathfrak{C}^*$ eindeutig bestimmt, wenn noch

$$\lim_{z \to 0} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} = 1$$

angenommen wird und die Funktionen

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z), \quad F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z)$$

aus dem Kreis $|1-z| < 1$ stetig in das Gebiet $\mathfrak{C}^*$ fortgesetzt werden.

Es gibt eine natürliche Zahl N, so daß

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = O(|z|^N),$$

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z) = O(|z|^N),$$

$$F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z) = O(|z|^N)$$

gleichmäßig für große $|z|$ im Innern von $\mathfrak{C}^*$ ist.

2. Der $(n-1)$-te Abschnitt von $f(z)$:

$$P_n(z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z + \dots + \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-2)\,\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-2)}{1 \cdot 2 \quad \dots \quad (n-1) \quad \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-2)} z^{n-1}$$

ist als Polynom im Innern von $\mathfrak{C}$ regulär. Durch die Gleichung

$$P_n(z) + Q_n(z) = f(z)$$

wird in $\mathfrak{C}$ eine weitere eindeutige reguläre Funktion $Q_n(z)$ definiert, die

[1]) Siehe z. B. Gauß, Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis. Ges. Werke III, S. 207 f.

im Innern des Einheitskreises mit dem $(n-1)$-ten Rest von $f(z)$ zusammenfällt. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$Q_n(z) = \frac{z^n}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}-z)\,\mathfrak{z}^n}\, d\mathfrak{z},$$

wobei über einen Kreis C:

$$|z| < |\mathfrak{z}| = \text{konst.} < 1$$

in positiver Richtung integriert wird.

Sei $n \geqq N$; alsdann darf der Integrationsweg ins Unendliche gezogen werden. Als neue Integrationskurve werde

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3$$

gewählt; dabei ist

$\mathfrak{C}_1$ die untere Seite des Schnittes $\mathfrak{S}$ von $+\infty$ bis $1+\varepsilon$,

$\mathfrak{C}_2$ der Kreis $|1-z| = \varepsilon$ in der Richtung von der Unterseite des Schnittes $\mathfrak{S}$ zur oberen,

$\mathfrak{C}_3$ die obere Seite des Schnittes $\mathfrak{S}$ von $1+\varepsilon$ bis $+\infty$ zurück, und ε bedeutet eine beliebig kleine Zahl des Intervalls $(0, 1)$.

Die Formel

$$Q_n(z) = \frac{z^n}{2\pi i} \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}-z)\,\mathfrak{z}^n}\, d\mathfrak{z}$$

gilt zunächst im Kreis $|z| < 1$; da das Integral auch außerhalb von $\mathfrak{C}$ regulär ist, so stellt es auch hier noch die Funktion $Q_n(z)$ dar.

Vermöge der Gaußschen Identität zerspaltet sich $Q_n(z)$ in die Summe

$$Q_n(z) = \frac{z^n}{2\pi i} \left\{ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}-z)\,\mathfrak{z}^n}\, d\mathfrak{z} \right.$$

$$\left. + \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int\limits_{\mathfrak{C}} (1-\mathfrak{z})^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}-z)\,\mathfrak{z}^n}\, d\mathfrak{z} \right\}.$$

Das erste Integral der rechten Seite verschwindet aber, da der Integrand im Innern von $\mathfrak{C}$ regulär ist. Also erhält man

$$Q_n(z) = \frac{z^n}{2\pi i} \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int\limits_{\mathfrak{C}} (1-\mathfrak{z})^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}-z)\,\mathfrak{z}^n}\, d\mathfrak{z}.$$

3. z werde auf den Bereich $\mathfrak{E}(\varepsilon)$:

$$|z| \leqq \frac{1}{\varepsilon}; \qquad |z-t| \geqq 2\varepsilon \quad \text{für} \quad t \geqq 1$$

beschränkt; mit abnehmendem ε strebt $\mathfrak{E}(\varepsilon)$ gegen $\mathfrak{E}$.

Läuft $\mathfrak{z}$ auf $\mathfrak{C}_1$ oder $\mathfrak{C}_3$, so ist gleichmäßig in z und $\mathfrak{z}$ für $n \to \infty$

$$(1-\mathfrak{z})^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}-z)\,\mathfrak{z}^N} = O(\mathfrak{z}^{-2});$$

$$\frac{\mathfrak{z}^N}{\mathfrak{z}^n} = O((1+\varepsilon)^{-n}),$$

also gleichmäßig in z

$$\left[\int\limits_{\mathfrak{C}_1} + \int\limits_{\mathfrak{C}_3}\right](1-\mathfrak{z})^{\gamma-\alpha-\beta} \frac{F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-\mathfrak{z})}{(\mathfrak{z}-z)\,\mathfrak{z}^n}\, d\mathfrak{z} = O((1+\varepsilon)^{-n}).$$

Ebenso erhält man für $n \to \infty$

$$\left[\int\limits_{\mathfrak{C}_1} + \int\limits_{\mathfrak{C}_3}\right] \frac{(1-\mathfrak{z})^{\nu}}{\mathfrak{z}^n}\, d\mathfrak{z} = O((1+\varepsilon)^{-n}),$$

wenn ν irgendeine endliche Konstante ist.

Im Innern des Kreises $|1-\mathfrak{z}| \leqq \varepsilon$ ist gleichmäßig in z und $\mathfrak{z}$

$$\frac{1}{\mathfrak{z}-z} = \frac{1}{1-z} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1-\mathfrak{z}}{1-z}\right)^l,$$

$$F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-\mathfrak{z}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l (1-\mathfrak{z})^l,$$

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{1\cdot(\gamma-\alpha-\beta+1)}, \quad A_2 = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)}{1\cdot 2\cdot(\gamma-\alpha-\beta+1)(\gamma-\alpha-\beta+2)}, \ldots,$$

und nach Multiplikation der beiden Funktionen

$$\frac{F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-\mathfrak{z})}{\mathfrak{z}-z} = \frac{1}{1-z} \sum_{l=0}^{\infty} a_l(z)(1-\mathfrak{z})^l,$$

$$a_l(z) = \sum_{h=0}^{l} A_h (1-z)^{h-l}.$$

Die natürliche Zahl k genüge der Ungleichung

$$K = \Re(k+\gamma-\alpha-\beta+1) > 0.$$

Die vorige Gleichung werde beim k-ten Glied abgebrochen, so daß gleichmäßig in z und $\mathfrak{z}$

$$\frac{F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-\mathfrak{z})}{\mathfrak{z}-z} = \frac{1}{1-z}\left\{\sum_{l=0}^{k-1} a_l (1-\mathfrak{z})^l + \Phi_k(\mathfrak{z}, z)\right\};$$

$$\Phi_k(\mathfrak{z}, z) = O(|1-\mathfrak{z}|^k)$$

ist und $\dfrac{\Phi_k(\mathfrak{z}, z)}{(1-\mathfrak{z})^k}$ in beiden Veränderlichen regulär wird. Im Integral

$$\mathfrak{J} = \int\limits_{\mathfrak{C}_2} \Phi_k(\mathfrak{z}, z) \frac{(1-\mathfrak{z})^{\gamma-\alpha-\beta}}{\mathfrak{z}^n}\, d\mathfrak{z}$$

darf daher der Integrationsweg in $\mathfrak{z}=1$ hineingezogen werden. Folglich ist gleichmäßig in z

$$\mathfrak{J}=O\left(\int_1^{1+\varepsilon}\frac{(\mathfrak{z}-1)^{K-1}}{\mathfrak{z}^n}\,d\,\mathfrak{z}\right)=O\left(\int_0^\infty \mathfrak{z}^{K-1}(1+\mathfrak{z})^{-n}\,d\,\mathfrak{z}\right).$$

Nun ist

$$\int_0^\infty \mathfrak{z}^{K-1}(1+\mathfrak{z})^{-n}\,d\,\mathfrak{z}=n^{-K}\int_0^\infty \mathfrak{z}^{K-1}\left(1+\frac{\mathfrak{z}}{n}\right)^{-n}d\,\mathfrak{z},$$

und da das letzte Integral für $n\to\infty$ gegen

$$\int_0^\infty \mathfrak{z}^{K-1}e^{-\mathfrak{z}}\,d\,\mathfrak{z}=\Gamma(K)$$

konvergiert, auch gleichmäßig in z

$$\mathfrak{J}=O(n^{-K}).$$

4. Zusammen mit der Integralformel für die Gammafunktion[2])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}}\frac{(1-\mathfrak{z})^\nu}{\mathfrak{z}^n}\,d\,\mathfrak{z}=\frac{\Gamma(n-\nu-1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(-\nu)}\quad \text{für}\quad \Re(n-\nu-1)>0$$

ergeben die letzten Abschätzungen gleichmäßig in z für $n\to\infty$:

$$Q_n(z)=\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,\frac{z^n}{1-z}\left\{O((1+\varepsilon)^{-n})\right.$$
$$\left.+\sum_{l=0}^{k-1}a_l(z)\left[\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta-\gamma-l-1)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-l)}+O((1+\varepsilon)^{-n})\right]+O(n^{-K})\right\},$$
$$K=\Re(k+\gamma-\alpha-\beta+1).$$

Und dies vereinfacht sich zu dem Ergebnis

$$Q_n(z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,\frac{z^n}{1-z}\left\{\sum_{l=0}^{k-1}a_l(z)\,\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta-\gamma-l-1)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(n)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma-l)}\right.$$
$$\left.+O\left(n^{-\Re(k+\gamma-\alpha-\beta+1)}\right)\right\},$$

gleichmäßig in z für $n\to\infty$.

Es ist klar, daß diese Formel bestehen bleibt, wenn man die Annahme über k fallen läßt. Speziell mit $k=1$ ist also

$$Q_n(z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,n^{\alpha+\beta-\gamma-1}\,\frac{z^n}{1-z}\left\{1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}.$$

---

[2]) Siehe: N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Kap. 10.

Die asymptotische Formel für $Q_n(z)$ kann auf den Fall ausgedehnt werden, daß $\alpha+\beta-\gamma$ eine ganze rationale Zahl ist. Z. B. ist für $f(z)=\log\frac{1}{1-z}$:

$$Q_n(z)=\frac{z^n}{1-z}\cdot\frac{1}{n-1}\left\{1-\frac{1}{(n-2)(1-z)}+\cdots\right.$$
$$\left.\mp\frac{(k-1)!}{(n-2)(n-3)\ldots(n-k)(1-z)^{k-1}}+O(n^{-k})\right\}.$$

II.

5. Die früher definierte Zahl ε sei so klein, daß der ganze Teilbogen

$$3\varepsilon\leqq|\operatorname{arc} z|\leqq\pi$$

des Einheitskreises in $\mathfrak{E}(\varepsilon)$ liegt. Da $f(z)$ in $\mathfrak{E}(\varepsilon)$ regulär ist, so hat diese Funktion dort nur endlich viele Nullstellen. Um jede derselben herum werde ein Kreis vom Radius ε entfernt; der Restbereich sei $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ genannt. Dann existieren zwei positive Konstanten A und B, so daß

$$A\leqq|f(z)|\leqq B$$

gleichmäßig im Innern von $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ ist.

Die Nullstellen von $P_n(z)$ genügen der Gleichung

$$P_n(z)\equiv f(z)-Q_n(z)=0.$$

Gleichmäßig im Innern von $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ ist aber

$$Q_n(z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,n^{\alpha+\beta-\gamma-1}\,\frac{z^n}{1-z}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

so daß die Nullstellen durch

$$z^n=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}\,n^{\gamma-\alpha-\beta+1}(1-z)f(z)\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

bestimmt sind. Hier darf auf beiden Seiten die n-te Wurzel gezogen werden. Wenn ω eine beliebige n-te Einheitswurzel auf dem Bogen

$$3\varepsilon\leqq|\operatorname{arc}\omega|\leqq\pi,\qquad \omega \text{ in } \mathfrak{H}(\varepsilon)$$

des Einheitskreises bedeutet, so ergibt sich für großes n gleichmäßig in ω

$$z=\omega\left\{1-\frac{\alpha+\beta-\gamma-1}{n}\log n+\frac{1}{n}\log\left[\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)}(1-\omega)f(\omega)\right]\right\}+O\left(\frac{\log^2 n}{n^2}\right).$$

Daß die Auflösung nach z tatsächlich erlaubt ist, folgt z. B. mit Hilfe der Lagrangeschen Umkehrformel[3]). Es sei bemerkt, daß man auch *asymptotische Reihen* für die Nullstellen herleiten kann, wenn man Gebrauch macht von der früheren unendlichen asymptotischen Reihe für $Q_n(z)$.

---

[3]) Siehe: Lagrange, Œuvres III, p. 25, sowie meine Arbeit [5]). Dort ist die Umkehrformel in einer Gestalt angegeben, die sich unmittelbar anwenden läßt.

Die vorige Formel zeigt sofort, daß die Nullstellen von $P_n(z)$ für $n \to \infty$ gegen jeden Punkt des Einheitskreises streben, wie es der Jentzsch-sche Satz verlangt [4]). Man erkennt, daß sie sich sogar gegen jeden Bogen des Einheitskreises in $\mathfrak{H}(\varepsilon)$ *gleichmäßig* dicht häufen.

6. Das benutzte Verfahren läßt sich in ähnlicher Form auch in anderen Fällen anwenden. So können damit die Nullstellen der Abschnitte von

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, z^n$$

und ähnlichen divergenten Reihen asymptotisch bestimmt werden. Ebenso lassen sich die Nullstellen der Abschnitte der beständig konvergenten Potenzreihe von

$$f(z) = e^{F(z)}$$

bestimmen, wenn $F(z)$ ein Polynom mit nichtnegativen Koeffizienten oder eine beständig konvergente Reihe der Form

$$F(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n z^n \qquad (a_0 \geqq a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots > 0)$$

ist [5]).

Krefeld, 28. 7. 1928.

---

[4]) Siehe: R. Jentzsch, Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen, Acta math. **41**, p. 219 f.

[5]) Das gleiche Verfahren benutzte ich auch in der Arbeit „Über die Nullstellen der unvollständigen Gammafunktionen“, die demnächst in den Rend. di Palermo erscheint.

(Eingegangen am 28. 7. 1928.)