MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL

IN AACHEN

ERICH HECKE

IN HAMBURG

Sonderabdruck aus Band 103, Heft 4 und 5.

Kurt Mahler

Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in speziellen Punktfolgen.

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1930

Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in speziellen Punktfolgen.

Von

Kurt Mahler in Krefeld.

Die Elemente der gegebenen Matrix

$$\Omega = (o_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

seien nichtnegative ganze rationale Zahlen; es bedeute

$$\Omega^k = (o_{\alpha\beta}^{(k)}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

die k-te Potenz von Ω. Wenn

$$z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

n komplexe Veränderliche sind, so werde mit

$$z' = \Omega^k z$$

die Transformation

$$z'_\alpha = \prod_{\beta=1}^{n} z_\beta^{o_{\alpha\beta}^{(k)}} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n)$$

bezeichnet.

Von arithmetischen Untersuchungen her gelangt man zu folgendem Problem:

„Die Koordinaten des Punktes z seien genügend klein, so daß die Werte

$$E(\Omega^k z)$$

der Potenzreihe

$$E(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \ldots h_n} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

für genügend großes k konvergieren. Man bestimme die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Verschwinden dieser Werte:

$$E(\Omega^k z).\text{“}$$

Für gewisse Klassen von Matrizen Ω läßt sich diese Frage vollständig beantworten. In meiner Arbeit: „Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionsgleichungen“, Math. Annalen **101**, zeigte ich:

„Die charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) = |\Omega - \varrho E|, \qquad E = \text{Einheitsmatrix},$$

sei im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel; sie besitze eine Wurzel ϱ größer als Eins und als der absolute Betrag der anderen Wurzeln. Wenn dann keine der Koordinaten von z verschwindet, wenn ferner

$$\Re\left(\sum_{\alpha=1}^{n} Z_\alpha \log z_\alpha\right) < 0$$

ist, wo die positiven Konstanten $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ allein von der Matrix Ω abhängen, so folgt aus dem Verschwinden aller Werte:

$$E(\Omega^k z)$$

mit großem k das identische Verschwinden von $E(z)$."

Der Beweis dieses Satzes ist rein algebraisch und nicht schwer. Bedeutend weniger einfach ist eine Untersuchung im Fall

$$\begin{pmatrix} \varrho & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varrho & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \varrho \end{pmatrix} = \varrho E,$$

wenn $\varrho \geqq 2$ eine natürliche Zahl bedeutet. Dieser Fall soll in der vorliegenden Arbeit behandelt werden; es wird gezeigt:

„Die Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seien algebraisch, absolut kleiner als Eins und von Null verschieden. Es bestehe keine Gleichung

$$z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden. Dann folgt aus dem Verschwinden der Werte

$$E(\Omega^k z)$$

mit großem k das identische Verschwinden von $E(z)$."

Der Beweis benutzt als Hauptmittel den Thue-Siegelschen Satz; aus ihm wird folgender Hilfssatz hergeleitet:

„Die n algebraischen Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seien vom Absolutbetrag Eins. Es bedeute $\varrho \geqq 2$ eine natürliche Zahl. Existiert ein Polynom

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \not\equiv 0$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten und eine positive Konstante $\alpha > 0$, so daß für großes natürliches k die Ungleichung

$$F(z_1^{\varrho^k}, z_2^{\varrho^k}, \ldots, z_n^{\varrho^k}) = O(e^{-\alpha \varrho^k})$$

besteht, so gibt es n ganze rationale Zahlen $e_1, e_2, \ldots, e_n$, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so daß

$$z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n} = 1$$

ist.“

Mittels dieses Hilfssatzes ist das angegebene Ergebnis sofort zu beweisen. Aus ihm wird im letzten Abschnitt dann noch eine arithmetische Folgerung gezogen.

I.

1. Es sei $\varrho \geqq 2$ eine natürliche Zahl, ξ eine algebraische Zahl vom Absolutbetrag Eins und Grad h. Zwischen den Basiselementen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h$$

des durch ξ erzeugten Zahlkörpers $K(\xi)$ bestehen Gleichungen

$$\omega_\alpha \omega_\beta = \sum_{\gamma=1}^{h} A_\gamma^{(\alpha\beta)} \omega_\gamma \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, h)$$

mit ganzen rationalen Zahlen $A_\gamma^{(\alpha\beta)}$; ihr absoluter Betrag habe das Maximum

$$A = \max_{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, h} (|A_\gamma^{(\alpha\beta)}|).$$

Die Zahl ξ gestattet die Darstellung

$$\xi = \frac{a_1 \omega_1 + \ldots + a_h \omega_h}{a_0} \qquad (a_0 \neq 0)$$

mit ganzen rationalen Zahlen a_α. Ebenso ist für jedes natürliche k

$$\xi^{\varrho^k} = \frac{a_1^{(k)} \omega_1 + \ldots + a_h^{(k)} \omega_h}{a_0^{(k)}} \qquad (a_0^{(k)} = a_0^{\varrho^k} \neq 0)$$

mit ganzen rationalen Zahlen $a_\alpha^{(k)}$.

2. Es gibt eine natürliche Zahl C, so daß

$$\max_{\alpha=0, 1, \ldots, h} (|a_\alpha^{(k)}|) \leqq C^{\varrho^k}$$

ist.

Denn sind

$$\eta = b_1 \omega_1 + \ldots + b_h \omega_h, \qquad b = \max_{\alpha=1, 2, \ldots, h} (|b_\alpha|);$$

$$\zeta = c_1 \omega_1 + \ldots + c_h \omega_h, \qquad c = \max_{\alpha=1, 2, \ldots, h} (|c_\alpha|)$$

zwei Zahlen in $K(\xi)$, so ist offenbar

$$\eta \zeta = d_1 \omega_1 + \ldots + d_h \omega_h; \qquad d_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{h} \sum_{\beta=1}^{h} A_\gamma^{(\alpha\beta)} b_\alpha c_\beta;$$

$$\max_{\gamma=1, 2, \ldots, h} (|d_\gamma|) \leqq h^2 A b c.$$

Durch wiederholte Anwendung der letzten Ungleichung ergibt sich somit die Behauptung, wenn

$$C = h^2 A \max_{\alpha=0,1,\ldots,h}(|a_\alpha|)$$

gesetzt wird.

3. Die Zahl η aus $K(\xi)$ sei endlich; sie besitzt eine Darstellung

$$\eta = \frac{b_1\omega_1 + \ldots + b_h\omega_h}{b_0}, \quad b_0 \neq 0; \qquad (b = \max_{\alpha=0,1,\ldots,h}(|b_\alpha|)$$

mit ganzen rationalen Zahlen b_α. Dann gibt es eine positive Konstante c_0, so daß entweder

$$\xi^{\varrho^k} - \eta = 0$$

oder

$$|\xi^{\varrho^k} - \eta| \geqq c_1 C^{-h\varrho^k}$$

ist, wenn k ins Unendliche wächst.

Denn sei die Zahl

$$\zeta = \xi^{\varrho^k} - \eta = \frac{(a_1^{(k)} b_0 - a_0^{(k)} b_1)\,\omega_1 + \ldots + (a_h^{(k)} b_0 - a_0^{(k)} b_h)\,\omega_h}{a_0^{(k)} b_0}$$

von Null verschieden; dann sind auch ihre in bezug auf $K(\xi)$ Konjugierten

$$\zeta, \zeta', \ldots, \zeta^{(h-1)}$$

ungleich Null. Das Produkt

$$(a_0^{(k)} b_0)^h \zeta\zeta' \ldots \zeta^{(h-1)}$$

ist also eine von Null verschiedene ganze rationale Zahl, daher mindestens vom Absolutbetrag Eins. Da nach 2. für jedes k

$$|a_0^{(k)} b_0 \zeta^{(\nu)}| \leqq 2b \sum_{\alpha=1}^{h} |\omega_\alpha| C^{\varrho^k} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, h-1)$$

ist, folgt

$$|\zeta| \geqq (b^h \{2 \sum_{\alpha=1}^{h} |\omega_\alpha|\}^{h-1} C^{h\varrho^k})^{-1}$$

und die Behauptung, wenn c_1 mit

$$c_1 = \left(b^h (2 \sum_{\alpha=1}^{h} |\omega_\alpha|)^{h-1}\right)^{-1}$$

gleichgesetzt wird.

4. Die Zahl η sei in bezug auf $K(\xi)$ vom genauen Grad $d \geqq 2$. Dann gibt es eine positive Konstante c_2, so daß für großes k

$$|\xi^{\varrho^k} - \eta| \geqq c_2 C^{-2h\sqrt{d}\varrho^k}$$

ist.

Diese Behauptung ist die unmittelbare Folge eines Satzes von C. Siegel. Man vergleiche: Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeitschrift **10**, S. 192.

5. Die Zahl η genüge der Gleichung

$$\eta^{\varrho^{\varkappa}} = 1,$$

wo $\varkappa$ eine natürliche Zahl bedeutet. Dann existiert eine positive Konstante c_3, so daß entweder

$$\xi^{\varrho^k} - \eta = 0$$

oder

$$|\xi^{\varrho^k} - \eta| \geqq c_3 C^{-2h\varrho^{k+\frac{\varkappa}{2}}}$$

ist, wenn k ins Unendliche wächst.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. Liegt erstens η in $K(\xi)$, so besteht nach 3. eine der Relationen

$$\xi^{\varrho^k} - \eta = 0 \quad \text{oder} \quad |\xi^{\varrho^k} - \eta| \geqq c_1 C^{-h\varrho^k} \geqq c_1 C^{-2h\varrho^{k+\frac{\varkappa}{2}}}.$$

Liegt dagegen η nicht in $K(\xi)$, so ist nach 4.

$$|\xi^{\varrho^k} - \eta| \geqq c_2 C^{-2h\varrho^{k+\frac{\varkappa}{2}}}.$$

In jedem Fall stimmt also die Behauptung.

6. Satz 1. *Die algebraische Zahl ξ sei vom Absolutbetrag Eins. Es bedeute $\varrho \geqq 2$ eine natürliche Zahl. Wenn die natürliche Zahl k ins Unendliche wächst, so gibt es zu jeder noch so kleinen positiven Konstanten ε eine natürliche Zahl $k_0(\varepsilon)$, so daß für $k \geqq k_0$ entweder*

$$\xi^{\varrho^k} = 1$$

oder

$$|\xi^{\varrho^k} - 1| \geqq e^{-\varepsilon\varrho^k}$$

ist.

Es besteht die Zerlegung

$$\xi^{\varrho^k} - 1 = \prod_{q=0}^{\varrho^{\varkappa}-1} \left(\xi^{\varrho^{k-\varkappa}} - e^{\frac{2q\pi i}{\varrho^{\varkappa}}}\right),$$

wo $\varkappa$ eine beliebige natürliche Zahl bedeutet. Da ξ vom Absolutbetrag Eins ist, so sind alle Faktoren in dieser Zerlegung beschränkt. Es gibt eine allein von $\varkappa$ abhängige positive Konstante c_4, so daß für jedes k von den Faktoren

$$\xi^{\varrho^{k-\varkappa}} - e^{\frac{2q\pi i}{\varrho^{\varkappa}}}$$

höchstens einer absolut kleiner als c_4 sein kann. Nach dem vorigen Abschnitt besteht für ihn eine der Relationen

$$\xi^{\varrho^{k-\varkappa}} - e^{\frac{2q\pi i}{\varrho^{\varkappa}}} = 0 \quad \text{oder} \quad \left|\xi^{\varrho^k} - e^{\frac{2q\pi i}{\varrho^{\varkappa}}}\right| \geqq c_3 C^{-2h\varrho^{k-\frac{\varkappa}{2}}}.$$

Somit ist mit einer positiven Konstanten c_5, die allein von $\xi, \varrho, \varkappa$ abhängt:

$$|\xi^{\varrho^k} - 1| = 0 \quad \text{oder} \quad \geqq c_5 C^{-2h\varrho^{k-\frac{\varkappa}{2}}}.$$

Sei jetzt ε eine beliebig kleine positive Konstante. Es werde die natürliche Zahl $\varkappa$ so groß gewählt, daß

$$2\,h\,\varrho^{-\frac{\varkappa}{2}} \log C \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Für genügend großes k gilt dann entweder

$$\xi^{\varrho^k} - 1 = 0$$

oder

$$\left|\,\xi^{\varrho^k} - 1\,\right| \geqq c_5\, e^{-\frac{\varepsilon}{2}\varrho^k} \geqq e^{-\varepsilon \varrho^k},$$

was zu beweisen war.

II.

7. Es sei $r \geqq 2$ eine natürliche Zahl und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n komplexe Veränderliche.

Die allgemeinste rationale Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x_1\, x_2 \ldots x_n) = F(x_1^r\, x_2^r \ldots x_n^r)$$

ist eine Konstante.

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß $F(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ nicht von x_1 abhängt. Sei

$$F(x_1\, x_2 \ldots x_n) = x_1^{\lambda}\, \frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{\mu} A_\alpha(x_2 \ldots x_n)\, x_1^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta=0}^{\nu} B_\beta(x_2 \ldots x_n)\, x_1^{\beta}},$$

wo

$$A_\alpha(x_2 \ldots x_n), \quad \alpha = 0, 1, \ldots, \mu; \qquad B_\beta(x_2 \ldots x_n), \quad \beta = 0, 1, \ldots, \nu$$

Polynome in $x_2, x_3, \ldots, x_n$ sind. Ohne Einschränkung sei

$$A_0(x_2 \ldots x_n) \not\equiv 0, \qquad B_0(x_2 \ldots x_n) \not\equiv 0$$

angenommen. Wegen der Funktionalgleichung ist alsdann

$$x_1^{\lambda}\, \frac{\sum\limits_{\alpha=0}^{\mu} A_\alpha(x_2 \ldots x_n)\, x_1^{\alpha}}{\sum\limits_{\beta=0}^{\nu} B_\beta(x_2 \ldots x_n)\, x_1^{\beta}} \equiv x_1^{r\lambda}\, \frac{\sum\limits_{0}^{\mu} A_\alpha(x_2^{\nu} \ldots x_n^{\nu})\, x_1^{\alpha\nu}}{\sum\limits_{\beta=0}^{\nu} B_\beta(x_2^{\nu} \ldots x_n^{\nu})\, x_1^{\beta\alpha}}.$$

Das ist aber nur dann möglich, wenn

$$\lambda = r\lambda, \quad \lambda = 0$$

ist und alle Polynome

$$A_\alpha(x_2 \ldots x_n), \quad \alpha \geqq 1; \qquad B_\beta(x_2 \ldots x_n), \quad \beta \geqq 1$$

identisch verschwinden. Somit nimmt $F(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ die Form an:

$$F(x_1\, x_2 \ldots x_n) = \frac{A_0(x_2 \ldots x_n)}{B_0(x_2 \ldots x_n)}$$

und ist in der Tat von x_1 unabhängig.

8. Die allgemeinste algebraische Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = F(x_1^r x_2^r \dots x_n^r)$$

ist eine Konstante.

Die Funktion $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ genügt einer Gleichung

$$F(x_1 x_2 \dots x_n)^l + A_1(x_1 x_2 \dots x_n) F(x_1 x_2 \dots x_n)^{l-1} + \dots + A_l(x_1 x_2 \dots x_n) = 0;$$

die Koeffizienten

$$A_1(x_1 x_2 \dots x_n), \; \dots, \; A_n(x_1 x_2 \dots x_n)$$

seien dabei rationale Funktionen von $x_1, x_2, \dots, x_n$ und die vorige Gleichung werde im Körper der rationalen Funktionen dieser Veränderlichen als irreduzibel angenommen. Aus der Funktionalgleichung ergibt sich die weitere algebraische Gleichung

$$F(x_1 x_2 \dots x_n)^l + A_1(x_1^\nu x_2^\nu \dots x_n^\nu) F(x_1 x_2 \dots x_n)^{l-1} + \dots + A_l(x_1^\nu x_2^\nu \dots x_n^\nu) = 0$$

und diese muß wegen der Irreduzibilität mit der ersten identisch sein. Also genügen ihre Koeffizienten der Gleichung

$$A_\lambda(x_1^\nu x_2^\nu \dots x_n^\nu) = A_\lambda(x_1 x_2 \dots x_n) \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, l)$$

und sind daher Konstante, ebenso auch die Funktion $F(x_1 x_2 \dots x_n)$.

9. Die allgemeinste von Null verschiedene algebraische Lösung der Funktionalgleichung

$$F(x_1 x_2 \dots x_n)^r = F(x_1^r x_2^r \dots x_n^r)$$

ist von der Form

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = \eta\, x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}.$$

Dabei bedeutet η eine $(r-1)$-te Einheitswurzel und

$$e_1, e_2 \dots e_n$$

n rationale Zahlen.

Zur Abkürzung sei gesetzt

$$F_l(x_1 x_2 \dots x_n) = x_l \frac{\dfrac{\partial}{\partial x_l} F(x_1 x_2 \dots x_n)}{F(x_1 x_2 \dots x_n)} \qquad (l = 1, 2, \dots n).$$

Durch Differentiation der Funktionalgleichung ergeben sich die Beziehungen

$$F_l(x_1 x_2 \dots x_n) = F_l(x_1^r x_2^r \dots x_n^r).$$

Aus ihnen folgt nach 8., daß die algebraischen Funktionen

$$F_l(x_1 x_2 \dots x_n) \qquad (l = 1, 2, \dots, n)$$

konstant sind, etwa

$$F_l(x_1 x_2 \dots x_n) \equiv e_l \qquad (l = 1, 2, \dots, n).$$

Dieses System von n Differentialgleichungen für $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ besitzt als allgemeinste Lösung

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = \eta\, x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$$

mit einer weiteren Konstanten η, die ungleich Null sei. Aus der Funktionalgleichung ergibt sich, daß

$$\eta^{\nu-1} = 1$$

ist, und weil ferner $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ algebraisch ist, so müssen die Exponenten

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

rationale Zahlen sein.

10. Satz 2: *Die n algebraischen Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seien vom Absolutbetrag Eins. Es bedeute $\varrho \geqq 2$ eine natürliche Zahl und α eine positive Konstante. Wenn dann ein Polynom*

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) \not\equiv 0$$

mit beliebigen komplexen Koeffizienten existiert, so daß für großes natürliches k die Ungleichung

$$F(z_1^{\varrho^k} z_2^{\varrho^k} \ldots z_n^{\varrho^k}) = O(e^{-\alpha \varrho^k})$$

besteht, so gibt es n ganze rationale Zahlen, $e_1, e_2, \ldots, e_n$, die nicht alle zugleich verschwinden, so daß

$$z_1^{e_1} z_2^{e_2} \ldots z_n^{e_n} = 1$$

ist.

Das Polynom $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ ist offenbar nicht von allen Veränderlichen frei, denn eine nichtverschwindende Konstante kann den Voraussetzungen nicht genügen.

Aus der Menge aller Polynome $F(x_1 x_2 \ldots x_n) \not\equiv 0$, die einer Beziehung

$$F(z_1^{\varrho^k} z_2^{\varrho^k} \ldots z_n^{\varrho^k}) = O(e^{-\alpha_F \varrho^k})$$

mit einer positiven Konstanten α_F, die von dem betreffenden Polynom noch abhängen kann, genügen, werde die Polynom-Teilmenge herausgegriffen, für die der größte Index, für den die Veränderliche x_l noch wirklich, also mindestens zur ersten Potenz in $F(x_1 x_2 \ldots x_n)$ vorkommt, gleich einer möglichst kleinen Zahl, etwa gleich g, ist. Diese Teilmenge ist gewiß nicht leer, wenn es überhaupt Polynome gibt, die den Voraussetzungen genügen.

Aus der vorigen Teilmenge werde alsdann ein Polynom $F^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ herausgegriffen, das die Veränderliche x_g zur niedrigsten, etwa f-ten Potenz enthält: $f \geqq 1$. Auch ein solches Polynom gibt es.

Das Polynom $F^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ befriedigt für großes k die Ungleichung

$$F^*(x_1 x_2 \ldots x_n) = O(e^{-\alpha^* \varrho^k})$$

mit einer positiven Konstanten α^*. Es lassen sich zu $F^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ zwei Polynome $F_1^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ und $F_2^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$ mit endlichen Koeffizienten konstruieren, die folgende Eigenschaften haben:

a) Beide Polynome verschwinden nicht identisch.

b) Das Polynom $F_1^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ enthält keine der Veränderlichen $x_g, x_{g+1}, \dots, x_n$; das Polynom $F_2^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ dagegen ist von den Veränderlichen $x_{g+1}, \dots, x_n$ frei und enthält x_g zur $(\varrho - 1)\,f$-ten Potenz.

c) Das Polynom

$$F^{**}(x_1 x_2 \dots x_n) = F_1^*(x_1 x_2 \dots x_n)\, F^*(x_1^\varrho x_2^\varrho \dots x_n^\varrho) + F_2^*(x_1 x_2 \dots x_n)\, F^*(x_1 x_2 \dots x_n)$$

ist von $x_{g+1}, \dots, x_n$ frei und enthält x_g höchstens zur $(f-1)$-ten Potenz.

Die Zahl k wachse jetzt über alle Grenzen. Alsdann ist

$$F^*(z_1^{\varrho^k} \dots z_n^{\varrho^k}) = O(e^{-\alpha^* \varrho^k}); \qquad F^*(z_1^{\varrho \varrho^k} \dots z_n^{\varrho \varrho^k}) = O(e^{-\alpha^* \varrho^k});$$

$$F_1^*(z_1^{\varrho^k} \dots z_n^{\varrho^k}) = O(1), \qquad F_2^*(z_1^{\varrho^k} \dots z_n^{\varrho^k}) = O(1)$$

und also auch

$$F^{**}(z_1^{\varrho^k} z_2^{\varrho^k} \dots z_n^{\varrho^k}) = O(e^{-\alpha^* \varrho^k}).$$

Diese Beziehung kann aber nur dann gelten, wenn $F^{**}(x_1 x_2 \dots x_n)$ identisch verschwindet. Daher besteht die identische Gleichung:

$$F_1^*(x_1 x_2 \dots x_n)\, F^*(x_1^\varrho x_2^\varrho \dots x_n^\varrho) + F_2^*(x_1 x_2 \dots x_n)\, F^*(x_1 x_2 \dots x_n) \equiv 0.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt das Polynom $F^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ in die Faktoren

$$F^*(x_1 x_2 \dots x_n) = \varphi_0(x_1 \dots x_{g-1}) \prod_{l=1}^{f} (x_g - \varphi_l(x_1 \dots x_{g-1})),$$

wo $\varphi_0(x_1 \dots x_{g-1})$ ein Polynom, die Ausdrücke

$$\varphi_1(x_1 \dots x_{g-1}), \ \dots, \ \varphi_f(x_1 \dots x_{g-1})$$

algebraische Funktionen der Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_{g-1}$ sind. Analog besteht die Zerlegung

$$F^*(x_1^\varrho x_2^\varrho \dots x_n^\varrho) = \varphi_0(x_1^\varrho \dots x_{g-1}^\varrho) \prod_{l=0}^{\varrho f} (x_g - \psi_l(x_1 \dots x_{g-1})),$$

wo die Ausdrücke

$$\psi_1(x_1 \dots x_{g-1}), \ \dots, \ \psi_{\varrho f}(x_1 \dots x_{g-1})$$

algebraische Funktionen in denselben Veränderlichen sind. Bei geeigneter Wahl der Indizes sind die beiden Reihen algebraischer Funktionen durch folgende Relationen verbunden:

$$\psi_{\varrho(\lambda-1)+\mu}(x_1 \dots x_{g-1}) = e^{\frac{2\mu\pi i}{\varrho}} \left[\varphi_e(x_1^\varrho \dots x_{g-1}^\varrho)\right]^{\frac{1}{\varrho}} \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \dots, f \\ \mu = 1, 2, \dots, \varrho \end{pmatrix}.$$

Die obige Identität besagt aber, daß $F^*(x_1^\varrho x_2^\varrho \dots x_n^\varrho)$ durch $F^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ teilbar ist, wenn beide nur als Polynome in x_g aufgefaßt werden; das ist nur dann möglich, wenn jede der Funktionen

$$\varphi_1(x_1 \dots x_{g-1}), \ \dots, \ \varphi_f(x_1 \dots x_{g-1})$$

mit einer der Funktionen

$$\psi_1(x_1 \dots x_{g-1}), \ \dots, \ \psi_{\varrho f}(x_1 \dots x_{g-1})$$

identisch ist. Also ist auch jede der Funktionen

$$\varphi_1(x_1 \dots x_{g-1})^{\varrho}, \ \dots, \ \varphi_f(x_1 \dots x_{g-1})^{\varrho}$$

mit einer der Funktionen

$$\varphi_1(x_1^{\varrho} \dots x_{g-1}^{\varrho}), \ \dots, \ \varphi_f(x_1^{\varrho} \dots x_{g-1}^{\varrho})$$

identisch. Das besagt, daß jede der Funktionen

$$\varphi_l(x_1 \dots x_{g-1}) \qquad (l = 1, 2, \dots, f)$$

einer Funktionalgleichung

$$\varphi_l(x_1 x_2 \dots x_{g-1})^r = \varphi_l(x_1^r x_2^r \dots x_{g-1}^r) \qquad (l = 1, 2, \dots, f)$$

genügt, wo r eine natürliche Potenz von ϱ ist. Die Lösung einer solchen Gleichung ist aber entweder Null, was im vorliegenden Fall durch die obigen Minimum-Annahmen ausscheidet; oder jede der algebraischen Funktionen $\varphi_l(x_1 \dots x_{g-1})$ ist von der Gestalt

$$\varphi_l(x_1 \dots x_{g-1}) = \eta_l x_1^{e_1^{(l)}} \dots x_{g-1}^{e_{g-1}^{(l)}} \qquad (l = 1, 2, \dots, f)$$

mit rationalen Exponenten

$$e_1^{(l)}, \ e_2^{(l)} \dots e_{g-1}^{(l)} \qquad (l = 1, 2, \dots, f),$$

während die Konstanten

$$\eta_1, \ \eta_2, \ \dots, \ \eta_f$$

gleich Einheitswurzeln sind. Ohne Einschränkung seien letztere etwa als d-te Einheitswurzeln vorausgesetzt.

Die Funktion $F^*(x_1 x_2 \dots x_n)$ nimmt somit die Form an:

$$F^*(x_1 x_2 \dots x_n) = \varphi_0(x_1 \dots x_{g-1}) \prod_{l=1}^{f} \left(x_g - \eta_l x_1^{e_1^{(l)}} \dots x_{g-1}^{e_{g-1}^{(l)}}\right)$$

und hieraus ergibt sich die Ungleichung:

$$\varphi_0(z_1^{\varrho^k} \dots z_{g-1}^{\varrho^k}) \prod_{l=1}^{f} (\eta_l \xi_l^{\varrho^k} - 1) = O(e^{-\alpha^* \varrho^k}); \ \ \xi_l = z_1^{e_1^{(l)}} \dots z_{g-1}^{e_{g-1}^{(l)}} z_g^{-1} \ (l = 1, 2 \dots f).$$

Sei ε eine positive Zahl, die der Ungleichung

$$0 < \varepsilon \leqq \frac{\alpha^*}{2f}$$

genügt. Ferner werde gegen Satz 2 vorausgesetzt, daß keine der Zahlen

$$\xi_1^{d\varrho^k} - 1, \quad \xi_2^{d\varrho^k} - 1, \quad \dots, \quad \xi_f^{d\varrho^k} - 1$$

für genügend großes k verschwindet. Nach Satz 1 besitzt jede der Ungleichungen

$$0 < \left| \xi_l^{d\varrho^k} - 1 \right| \leqq e^{-\varepsilon \varrho^k} \qquad (l = 1, 2, \dots, f)$$

nur endlich viele Lösungen; für genügend großes k ist folglich erst recht:

$$\left| \eta_l \xi_l^{\varrho^k} - 1 \right| \geqq c_6\, e^{-\varepsilon \varrho^k} \qquad (l = 1, 2, \ldots, f)$$

und also auch

$$\left| \prod_{l=1}^{f} (\eta_l \xi_l^{\varrho^k} - 1) \right| \geqq c_6^f\, e^{-\frac{\alpha^*}{2} \varrho^k},$$

wenn c_6 eine gewisse positive Konstante bedeutet. Infolgedessen ist auch:

$$\varphi_0 (z_1^{\varrho^k} \ldots z_{g-1}^{\varrho^k}) = O\left(e^{-\frac{\alpha^*}{2} \varrho^k}\right).$$

Diese Ungleichung widerspricht aber den Minimum-Annahmen über das Polynom $F^*(x_1 x_2 \ldots x_n)$, so daß man zu einem Widerspruch gelangt. Also muß mindestens eine der Zahlen

$$\eta_l \xi_l^{\varrho^k} - 1 \qquad (l = 1, 2, \ldots, f)$$

für genügend großes k gleich Null werden, wie Satz 2 aussagt.

III.

11. Satz 3. *Die Potenzreihe*

$$E(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \ldots h_n} x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$$

konvergiere in der Umgebung des Nullpunktes. Die n algebraischen Zahlen

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

seien von Null verschieden und im Innern des Einheitskreises gelegen. Es gebe $m \leqq n$ algebraische Zahlen

$$\mathfrak{z}_1\, \mathfrak{z}_2 \cdots \mathfrak{z}_m,$$

zwischen denen keine Gleichung

$$\mathfrak{z}_1^{e_1} \mathfrak{z}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{z}_m^{e_m} = 1$$

besteht, wo die Exponenten ganze rationale Zahlen sind, die nicht gleichzeitig verschwinden; es sei

$$z_l = \mathfrak{z}_1^{q_{1l}} \cdots \mathfrak{z}_m^{q_{ml}} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

und die Matrix

$$(q_{\lambda l}) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \ldots, m \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

habe nur ganze rationale Elemente und den genauen Rang m. Weiter bedeute $\varrho \geqq 2$ eine feste natürliche Zahl.

Wenn dann

$$E^*(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_m) \equiv E(x_1 \ldots x_n), \qquad x_l = \mathfrak{x}_1^{q_{1l}} \ldots \mathfrak{x}_m^{q_{ml}} \qquad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

als Funktion der Veränderlichen

$$\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \cdots \mathfrak{x}_m$$

nicht identisch verschwindet, so gibt es eine positive Konstante γ und eine Folge ins Unendliche wachsender natürlichen Zahlen k, so daß

$$\left| E(z_1^{\varrho^k} \ldots z_n^{\varrho^k}) \right| \geqq e^{-\gamma \varrho^k}$$

ist. —

Als Funktion der Veränderlichen

$$\mathfrak{x}_1 \mathfrak{x}_2 \ldots \mathfrak{x}_m$$

wird

$$E(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum_{\mathfrak{h}_1} \cdots \sum_{\mathfrak{h}_m} \mathfrak{B}_{\mathfrak{h}_1 \ldots \mathfrak{h}_m} \mathfrak{x}_1^{\mathfrak{h}_1} \ldots \mathfrak{x}_m^{\mathfrak{h}_m}$$

oder

$$E(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum_R E_R(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_m);$$

$$E_R(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_m) = \sum_{\substack{\mathfrak{h}_1 \\ |\mathfrak{z}_1^{\mathfrak{h}_1} \ldots \mathfrak{z}_m^{\mathfrak{h}_m}| = R}} \cdots \sum_{\mathfrak{h}_m} \mathfrak{B}_{\mathfrak{h}_1 \ldots \mathfrak{h}_m} \mathfrak{x}_1^{\mathfrak{h}_1} \ldots \mathfrak{x}_m^{\mathfrak{h}_m}.$$

Offenbar entspricht nur den Gliedern

$$R_0,\ R_1,\ R_2,\ \ldots \qquad (1 > R_0 > R_1 > R_2 > \ldots \geqq 0)$$

einer gewissen abzählbaren Folge wirklich ein Summand $E_R(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_m) \not\equiv 0$.

Jetzt werde angenommen, daß bei geeigneter Wahl der Indizes die Zahlen

$$\log|\mathfrak{z}_1|,\ \log|\mathfrak{z}_2|,\ \ldots,\ \log|\mathfrak{z}_{m-h}|$$

in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen linear unabhängig sind, daß dagegen die Zahlen

$$\log|\mathfrak{z}_{m-h+1}|,\ \ldots,\ \log|\mathfrak{z}_m|$$

von ihnen linear abhängen. Dann gibt es h komplexe Zahlen

$$\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_h$$

vom Absolutbetrag Eins, die keiner Gleichung

$$\zeta_1^{e_1} \zeta_2^{e_2} \ldots \zeta_h^{e_h} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten, die nicht gleichzeitig verschwinden, genügen, so daß

$$\mathfrak{z}_{m-h+l} = \mathfrak{z}_1^{e_{1,l}} \ldots \mathfrak{z}_{m-h}^{e_{m-h,l}} \zeta_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, h)$$

mit rationalen Exponenten

$$e_{1,l} \ldots e_{m-h,l} \qquad (l = 1, 2, \ldots, h)$$

ist. Mit ihrer Benutzung geht $E_R(\mathfrak{z}_1^{\varrho^k} \ldots \mathfrak{z}_m^{\varrho^k})$ über in

$$E_R(\mathfrak{z}_1^{\varrho^k} \ldots \mathfrak{z}_m^{\varrho^k}) = (\mathfrak{z}_1^{\mathfrak{h}_1^0} \ldots \mathfrak{z}_{m-h}^{\mathfrak{h}_{m-h}^0})^{\varrho^k} (\zeta_1^{\varkappa_1} \ldots \zeta_h^{\varkappa_h})^{-\varrho^k} \mathsf{E}_R(\zeta_1^{\varrho^k} \ldots \zeta_h^{\varrho^k}).$$

Dabei ist

$$\left| \mathfrak{z}_1^{\mathfrak{h}_1^0} \ldots \mathfrak{z}_{m-h}^{\mathfrak{h}_{m-h}^0} \right| = R;$$

die Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_h$ sind nichtnegativ und ganz rational, und der Ausdruck $\mathsf{E}_R(\zeta_1^{\varrho^k} \ldots \zeta_h^{\varrho^k})$ ist ein von k unabhängiges Polynom $\mathsf{E}_R(\mathsf{Z}_1 \ldots \mathsf{Z}_h)$ in den Werten

$$\mathsf{Z}_1 = \zeta_1^{\varrho^k} \ldots \mathsf{Z}_h = \zeta_h^{\varrho^k}.$$

Offenbar verschwindet dieses Polynom dann und nur dann identisch, wenn $E_R(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_m)$ selbst identisch verschwindet.

Von jetzt ab sei angenommen, daß die Reihe

$$E(x_1 x_2 \ldots x_n) = E^*(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_m)$$

als Funktion der Veränderlichen

$$\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_m$$

nicht identisch verschwindet. Offenbar gibt es dann auch eine Funktion

$$E_{R_\nu}(\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_m)$$

vom kleinsten Index, also größtem R_ν, die nicht identisch verschwindet so daß auch

$$\mathsf{E}_{R_\nu}(\mathsf{Z}_1 \ldots \mathsf{Z}_h)$$

von Null verschieden ist. Nun ist

$$E_{R_\mu}(\mathfrak{z}_1^{\varrho^k} \ldots \mathfrak{z}_m^{\varrho^k}) = O(R_\mu^{\varrho^k})$$

und daher für großes k die Summe

$$\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty} E_{R_\mu}(\mathfrak{z}_1^{\varrho^k} \ldots \mathfrak{z}_\mu^{\varrho^k})$$

von der Größenordnung

$$O(R_{\nu+1}^{\varrho^k}).$$

Andrerseits ist nach Satz 2 für eine Folge ins Unendliche wachsender natürlicher Zahlen k bei beliebig kleinem festen positiven ε:

$$\left| \mathsf{E}_{R_\nu}(\zeta_1^{\varrho^k} \ldots \zeta_h^{\varrho^k}) \right| \geqq e^{-\varepsilon \varrho^k}$$

und somit auch

$$\left| E_{R_\nu}(\mathfrak{z}_1^{\varrho^k} \ldots \mathfrak{z}_m^{\varrho^k}) \right| \geqq R_\nu^{\varrho^k} e^{-\varepsilon \varrho^k}.$$

Folglich ergibt sich, wenn noch $2\varepsilon = \log \frac{R_\nu}{R_{\nu+1}}$ gewählt wird, für die Folge k:

$$\left| E(z_1^{\varrho^k} \ldots z_n^{\varrho^k}) \right| = \left| E^*(\mathfrak{z}_1^{\varrho^k} \ldots \mathfrak{z}_m^{\varrho^k}) \right| \geqq (R_\nu R_{\nu+1})^{\frac{1}{2}\varrho^k} + O(R_{\nu+1}^{\varrho^k}) \geqq R_{\nu+1}^{\varrho^k},$$

w. z. b. w.

IV.

12. Der letzte Satz entspricht genau dem Satz 1 meiner Arbeit: Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen (Math. Annalen **101**, S. 351). Auf analoge Art wie dort kann auch aus ihm ein Transzendenzsatz erschlossen werden, weshalb ich auf die Durchführung des Beweises verzichte. Das Ergebnis lautet:

Satz 4. *Es sei* $\varrho \geqq 2$ *eine feste natürliche Zahl,*

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \dots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \dots h_n} x_1^{h_1} \dots x_n^{h_n}$$

eine in der Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe in den n *Veränderlichen* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *mit algebraischen Koeffizienten aus einem endlichen Zahlkörper. Die Funktion* $F(x_1 x_2 \dots x_n)$ *genüge einer Funktionalgleichung*

$$F(x_1^{\varrho} x_2^{\varrho} \dots x_n^{\varrho}) = \frac{\sum_{l=0}^{m} a_l(x_1 x_2 \dots x_n) F(x_1 x_2 \dots x_n)^l}{\sum_{l=0}^{m} b_l(x_1 x_2 \dots x_n) F(x_1 x_2 \dots x_n)^l} \qquad (1 \leqq m < \varrho),$$

wo die $a_l(x_1 \dots x_n)$, $b_l(x_1 \dots x_n)$ *Polynome mit endlichen algebraischen Koeffizienten sind. Die beiden Polynome*

$$\sum_{l=0}^{m} a_l(x_1 x_2 \dots x_n) u^l, \qquad \sum_{l=0}^{m} b_l(x_1 x_2 \dots x_n) u^l$$

seien in allen Veränderlichen teilerfremd; mindestens eins besitze den genauen Grad m *in* u; *ihre Resultante in bezug auf* u *sei gleich* $\Delta(x_1 x_2 \dots x_n)$.

Die m *algebraischen Zahlen*

$$z_1, z_2, \dots, z_n; \qquad 0 < |z_l| < 1 \qquad (l = 1, 2, \dots, n)$$

seien von der Gestalt

$$z_l = \mathfrak{z}_1^{q_{1l}} \dots \mathfrak{z}_m^{q_{ml}} \qquad (l = 1, 2, \dots, n),$$

dabei seien

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \dots, \mathfrak{z}_m$$

m *algebraische Zahlen, zwischen denen keine Beziehung*

$$\mathfrak{z}_1^{e_1} \mathfrak{z}_2^{e_2} \dots \mathfrak{z}_m^{e_m} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten, die nicht gleichzeitig verschwinden, besteht; die Matrix

$$(q_{\lambda l}) \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, 2, \dots, m \\ l = 1, 2, \dots, n \end{pmatrix}$$

besitze ganze rationale Elemente und den genauen Rang m. *Ferner sei angenommen, daß keine der Zahlen*

$$\Delta(z_1^{\varrho^k} z_2^{\varrho^k} \dots z_n^{\varrho^k}) \qquad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

verschwindet. Wenn dann

$$F^*(\mathfrak{x}_1 \dots \mathfrak{x}_m) = F(x_1 x_2 \dots x_n), \qquad x_l = \mathfrak{x}_1^{q_{1l}} \dots \mathfrak{x}_m^{q_{ml}} \qquad (l = 1, 2, \dots, n)$$

als Funktion der Veränderlichen

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_m$$

nicht algebraisch ist, so stellt $F(z_1 z_2 \dots z_n)$ *eine transzendente Zahl dar.*

Im Falle $m = 1$ läßt sich sogar zeigen, daß es sich um Nicht-Liouvillesche Zahlen handelt.

13. Aus dem vorigen Satz lassen sich z. B. diese Folgerungen ziehen:

a) Die von Null verschiedenen algebraischen Zahlen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seien im Innern des Einheitskreises gelegen; keiner der Quotienten $\frac{\log z_\alpha}{\log z_\beta}$ sei gleich einer ganzen rationalen Potenz von ϱ. Ferner seien $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ n von Null verschiedene algebraische Zahlen. Dann stellt der Ausdruck

$$\sum_{l=1}^{n} Z_l \Phi(z_l); \qquad \Phi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} x^{\varrho^k}$$

eine transzendente Zahl dar.

b) $q(h)$ sei die Quersumme von h im ϱ-adischen System; es sei

$$\Psi(x) = \sum_{h=0}^{\infty} q(h) x^h.$$

Dann ist unter den gleichen Voraussetzungen wie in a) die Zahl

$$\sum_{l=1}^{n} Z_l \Psi(z_l)$$

transzendent.

Diese Beispiele lassen sich beliebig vermehren.

Krefeld, im Herbst 1928.

(Eingegangen am 8. 5. 1929.)