MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

Sonderabdruck aus Band 32, Heft 4.

Kurt Mahler

Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen.

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1930

Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen.

Von

Kurt Mahler in Krefeld.

In dieser Arbeit soll folgender Satz bewiesen werden:

„Die Elemente der quadratischen Matrix

$$\Omega = (o_{\alpha\beta}), \qquad \Omega^k = (o_{\alpha\beta}^{(k)}), \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

seien nichtnegative ganze rationale Zahlen. Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) \equiv |\Omega - \varrho E| = 0, \qquad E = \text{Einheitsmatrix},$$

sei im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel und besitze eine Wurzel ϱ_1, die größer als Eins und der absolute Betrag der andern Wurzeln ist. Für großes k ist dann asymptotisch

$$\Omega^k \sim \varrho_1^k \Gamma, \qquad \Gamma = (c_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die Elemente der Matrix Γ positiv sind. Bedeuten $z_1, z_2, \ldots, z_n$ n komplexe Veränderliche, so sei mit

$$z^{(k)} = \Omega^k z$$

die Transformation

$$z_\alpha^{(k)} = \prod_{\beta=1}^{n} z_\beta^{o_{\alpha\beta}^{(k)}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

bezeichnet.

Weiter seien

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \ldots, a_m > 0$$

m algebraische Zahlen und

$$b_1(z) \not\equiv 0, \quad b_2(z) \not\equiv 0, \ldots, b_m(z) \not\equiv 0$$

m rationale Funktionen in den z_α mit algebraischen Koeffizienten, die für $z_1 = \ldots = z_n = 0$ verschwinden. Die Potenzreihen

$$f_\mu(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_m=0}^{\infty} f_{h_1 \ldots h_m}^{(\mu)} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

sollen den Funktionalgleichungen

$$f_\mu(z) = a_\mu f_\mu(\Omega z) + b_\mu(z) \qquad (\mu = 1, 2, .., m)$$

genügen und es seien ihre Taylorkoeffizienten gleich algebraischen Zahlen. Ferner bestehe zwischen ihnen keine algebraische Funktionalgleichung

$$\mathfrak{F}(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z) \mid z) \equiv 0,$$

wo das Polynom

$$\mathfrak{F}(w_1, w_2, \ldots, w_m \mid z)$$

nicht identisch verschwindet.

Wenn dann die m algebraischen Zahlen $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_m$ den Ungleichungen

$$\mathfrak{z}_1 \mathfrak{z}_2 \cdots \mathfrak{z}_m \neq 0, \qquad \Re\left(\sum_{\beta=1}^{n} c_{1\beta} \log \mathfrak{z}_\beta\right) < 0$$

genügen, wenn ferner die Nenner der rationalen Funktionen

$$b_1(z), b_2(z), \ldots, b_m(z)$$

in keinem der Punkte

$$\mathfrak{z}, \Omega\mathfrak{z}, \Omega^2\mathfrak{z}, \ldots$$

gleich Null sind, so sind die m Zahlen

$$f_1(\mathfrak{z}), f_2(\mathfrak{z}), \ldots, f_m(\mathfrak{z})$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen, d. h. es besteht zwischen ihnen keine algebraische Gleichung mit algebraischen Koeffizienten."

Bei den betrachteten Funktionen herrscht also vollständige Analogie zwischen der funktionentheoretischen und arithmetischen Unabhängigkeit. In der Arbeit wird der genannte Satz kurz als Hauptsatz zitiert.

Das erste und zweite Kapitel bringt zunächst einige funktionentheoretische Entwicklungen über die Unabhängigkeit der Funktionen $f_\mu(z)$; hierfür werden notwendige und hinreichende Bedingungen aufgestellt. Das dritte, vierte und fünfte Kapitel bringt dann den eigentlichen Beweis für den Hauptsatz, der folgendermaßen verläuft:

Seien mit $t_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$ endlich viele, etwa genau $\mathfrak{n}$ Parameter bezeichnet, und sei

$$F(z \mid t) = \sum_\alpha t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} f_1(z)^{\alpha_1} \cdots f_m(z)^{\alpha_m}$$

ein Polynom in den Funktionen $f_\mu(z)$. Alsdann besteht bei beliebigem natürlichen k die Funktionalgleichung

$$F(z \mid t) = F(\Omega^k z \mid t^{(k)}),$$

und zwar gehen die Werte $t^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ aus den Werten $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ durch eine homogene lineare Transformation hervor, deren Koeffizienten außer von k noch von den Zahlen z_α abhängen. Es sei $\mathfrak{z}$ ein fester Punkt in $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$

ein festes System von Zahlen, die nicht alle verschwinden. Dabei ist $\mathfrak{u}$ die Menge aller Punkte z, die den Ungleichungen

$$z_1 z_2 \ldots z_n \neq 0, \qquad \Re\left(\sum_{\beta=1}^{n} c_{1\beta} \log z_\beta\right) < 0,$$

$$b_1^*(\Omega^k z) \neq 0, \quad b_2^*(\Omega^k z) \neq 0, \quad \ldots, \quad b_m^*(\Omega^k z) \neq 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

genügen und $b_\mu^*(z)$ bedeutet den Nenner der rationalen Funktion $b_\mu(z)$. Mit $\mathfrak{t}^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ seien die zu k und zu den Werten $\mathfrak{z}_\alpha$ gehörigen linear Transformierten der Zahlen $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ bezeichnet. Ferner werde

$$A(z \mid t) \sim 0(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}) \quad \text{oder} \quad A(z \mid t) \nsim 0(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{t})$$

geschrieben, je nachdem ob für alle genügend großen k

$$A(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)}) = 0$$

ist oder nicht; dabei sei $A(z \mid t)$ ein beliebiges Polynom. Dieser Äquivalenzbegriff genügt den folgenden Regeln:

a) Aus $A(z|t) \sim 0(\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$, $B(z|t) \sim 0(\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$ folgt $A(z|t) + B(z|t) \sim 0(\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$.

b) Aus $A(z|t) \sim 0(\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$, $B(z|t)$ beliebig folgt $A(z|t)\,B(z|t) \sim 0(\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$.

c) Aus $A(z|t) \sim 0(\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$ folgt $A(z|t) \sim 0(\mathfrak{z}^*|\mathfrak{t})$, wenn $\mathfrak{z}^*$ in $\mathfrak{u}$ liegt.

d) Aus $A(z|t) \nsim 0(\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$, $B(z|t) \nsim 0(\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$ folgt $A(z|t)\,B(z|t) \nsim 0(\mathfrak{z}|\mathfrak{t})$.

Seien jetzt alle Annahmen des Hauptsatzes erfüllt; in einem geeigneten algebraischen Zahlkörper, etwa $K(s)$ vom Grad K, liegen dann gleichzeitig die Werte $\mathfrak{z}_\alpha$, $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$, a_μ, die Koeffizienten der Funktionen $b_\mu(z)$, und die der Funktionen $f_\mu(z)$. Vermöge der angegebenen Eigenschaften der „Äquivalenz“ läßt sich dann zeigen:

„Zu jeder genügend großen natürlichen Zahl p gibt es $p+1$ Polynome

$$\mathfrak{A}_h(z \mid t) \qquad (h = 0, 1, \ldots, p)$$

mit folgenden Eigenschaften:

A. Die Polynome sind in den z_α und den $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ höchstens vom Grad p.

B. Ihre Koeffizienten sind Zahlen aus $K(s)$.

C. Es ist

$$\mathfrak{A}_0(z \mid t) \nsim 0(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}).$$

D. Die Potenzreihe

$$\mathfrak{E}(z \mid t) = \sum_{h=0}^{p} \mathfrak{A}_h(z \mid t)\, F(z \mid t)^h = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

besitzt als Koeffizienten Polynome in den $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$; für

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n \leqq 2^{-3-\frac{\mathfrak{n}}{n}}\, p^{1+\frac{1}{n}} - 1$$

ist

$$\mathfrak{E}_{h_1 \ldots h_n}(t) \sim 0(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}).“$$

Aus diesem Satz folgt weiter durch einfache Abschätzungen:

1. Ungleichung. Ist p eine genügend große natürliche Zahl und durchläuft k eine unendliche von p abhängige Zahlfolge, so ist

$$|\mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)})| \geqq e^{-c_8 p \varrho_1^k}$$

mit einer positiven Konstanten c_8, die von p und k nicht abhängt.

2. Ungleichung. Ist p eine genügend große natürliche Zahl und liegt k oberhalb einer von p abhängigen Schranke, so ist

$$|\mathfrak{E}(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)})| \leqq e^{-c_{12} p^{1+\frac{1}{n}} \varrho_1^k}$$

mit einer positiven Konstanten c_{12}, die von p und k nicht abhängt.

Sei jetzt der Hauptsatz falsch; dann gibt es also Werte der Parameter $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ aus $K(s)$, so daß

$$F(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)}) = F(\mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}) = \sum_{\alpha} \mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} f_1(\mathfrak{z})^{\alpha_1} \ldots f_m(\mathfrak{z})^{\alpha_m} = 0$$

ist. Wie auch die natürlichen Zahlen p und k gewählt werden, muß also

$$\mathfrak{E}(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)}) = \mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)})$$

sein, und das widerspricht den beiden letzten Ungleichungen. —

Das letzte Kapitel bringt als Anwendung auf die Reihe

$$\sum_{h=1}^{\infty} [h\omega] z^h,$$

$\omega > 0$ reelle quadratische Irrationalzahl, den Nachweis ihrer funktionentheoretischen Transzendental-Transzendenz.

Wegen des Beweises in dieser Arbeit sei auf meine beiden früheren verwiesen: „Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen“ und „Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in gewissen Punktfolgen“, beide in den Mathematischen Annalen.

I.

1. Die quadratische Matrix

$$\Omega = (o_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

besitze folgende Eigenschaften:

a) Die Elemente $o_{\alpha\beta}$ sind nichtnegative ganze rationale Zahlen.

b) Die charakteristische Gleichung

$$\Phi(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} o_{11} - \varrho & o_{12} & \ldots & o_{1n} \\ o_{21} & o_{22} - \varrho & \ldots & o_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ o_{n1} & o_{n2} & \ldots & o_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

ist im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel.

c) Ihre Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$ sind sämtlich verschieden und genügen der Ungleichung

$$\varrho_1 > \max(1, |\varrho_2|, |\varrho_3|, \ldots, |\varrho_n|).$$

Unter diesen Annahmen besteht für die k-te Potenz

$$\Omega^k = (o_{\alpha\beta}^{(k)}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

von Ω für großes natürliches k die asymptotische Darstellung

$$\Omega^k \sim \varrho_1^k \Gamma.$$

Die Matrix

$$\Gamma = (c_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

hat dabei lauter positive Elemente und den genauen Rang Eins; die Glieder einer Zeile oder Spalte sind linear unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen.

Ist $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ ein Punkt im n-dimensionalen Raum mit beliebigen komplexen Koordinaten, so bezeichne

$$z^{(k)} = \Omega^k z$$

den Punkt mit den transformierten Koordinaten

$$z_\alpha^{(k)} = \prod_{\beta=1}^{n} z_\beta^{o_{\alpha\beta}^{(k)}} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Es ist

$$\Omega^{k_1}(\Omega^{k_2} z) = \Omega^{k_1+k_2} z.$$

Die Punktmenge

$$\Re(\Lambda) < 0, \qquad z_1 z_2 \ldots z_n \neq 0, \qquad \Lambda = \sum_{\beta=1}^{n} c_{1\beta} \log z_\beta$$

heiße $\mathfrak{U}$. Nur für die Punkte von $\mathfrak{U}$ strebt mit wachsendem k jede der n Zahlen $z_\alpha^{(k)}$ gegen Null, ohne jedoch je diesen Wert wirklich anzunehmen.

Liegt z in $\mathfrak{U}$, so genügt jedes Potenzprodukt

$$z_1^{(k)\,h_1} z_2^{(k)\,h_2} \ldots z_n^{(k)\,h_n}$$

mit rationalen Exponenten der asymptotischen Gleichung

$$\log\left(z_1^{(k)\,h_1} z_2^{(k)\,h_2} \ldots z_n^{(k)\,h_n}\right) \sim \mathsf{H} \Lambda \varrho_1^k, \qquad \mathsf{H} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{c_{\alpha 1}}{c_{11}} h_\alpha,$$

und zu zwei verschiedenen Produkten gehören auch verschiedene Zahlen H [1]).

2. Die m Funktionen

$$f_\mu(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \sum_{h_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{h_n=0}^{\infty} f_{h_1 h_2 \ldots h_n}^{(\mu)} z_1^{h_1} z_2^{h_2} \ldots z_n^{h_n} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

---

[1]) Siehe das erste Kapitel meiner Arbeit: „Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen", Math. Annalen **101**, S. 342.

seien gleichzeitig in einer Umgebung des Nullpunktes regulär; die μ-te von ihnen genüge der Funktionalgleichung

$$f_\mu(z) = a_\mu f_\mu(\Omega z) + b_\mu(z) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wobei

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

m Zahlen ungleich Null und

$$b_1(z),\ b_2(z),\ \ldots,\ b_m(z)$$

m rationale nicht identisch verschwindende Funktionen in den z_α sind, die im Nullpunkt $z_1 = z_2 = \ldots = z_m = 0$ gleich Null sind. Es gebe ein nicht identisch verschwindendes Polynom

$$\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m | z_1 z_2 \ldots z_n) = \mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m | z)$$

mit endlichen Koeffizienten, so daß die Funktionalgleichung

$$\mathfrak{F}(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z) | z) = 0$$

besteht.

3. Von zwei Produkten

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}(z)\, w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \ldots w_m^{\alpha_m}, \qquad A_{\bar\alpha_1 \bar\alpha_2 \ldots \bar\alpha_m}(z)\, w_1^{\bar\alpha_1} w_2^{\bar\alpha_2} \ldots w_m^{\bar\alpha_m},$$

wo $A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}(z) \not\equiv 0$ und $A_{\bar\alpha_1 \bar\alpha_2 \ldots \bar\alpha_m} \not\equiv 0$ Polynome in den z_α und die Exponenten α_μ, $\bar\alpha_\mu$ nichtnegative ganze rationale Zahlen sind, heiße das erste von höherem Rang als das zweite, wenn die erste nichtverschwindende der Differenzen

$$\alpha_1 - \bar\alpha_1,\ \alpha_2 - \bar\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m - \bar\alpha_m$$

positiv ist; sind alle gleich Null, so heißen sie von gleichem Rang.

Ferner heiße ein Polynom

$$\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m | z) \not\equiv 0$$

von höherem Rang als ein zweites Polynom

$$\bar{\mathfrak{F}}(w_1 w_2 \ldots w_m | z) \not\equiv 0,$$

wenn der Summand höchsten Ranges des ersten bei der Entwicklung nach Potenzen von $w_1, w_2, \ldots, w_m$ höheren Rang hat als der entsprechende Summand des zweiten Polynoms; sind beide Summanden von gleichem Rang, so seien auch die Polynome von gleichem Rang genannt.

Eine Folge von Polynomen

$$\mathfrak{F}_1(w_1 w_2 \ldots w_m | z), \quad \mathfrak{F}_2(w_1 w_2 \ldots w_m | z), \ \ldots,$$

in der jedes folgende Glied niedereren Rang hat als das vorhergehende, muß offenbar im Endlichen abbrechen.

4. Nach Voraussetzung gibt es ein Polynom

$$\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m | z) \not\equiv 0$$

mit

$$\mathfrak{F}(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z) | z) = 0.$$

Ohne Einschränkung kann der Rang desselben möglichst klein angenommen werden. Offenbar muß es eine der Veränderlichen w_μ mindestens zur ersten Potenz enthalten.

Neben der Gleichung

$$\mathfrak{F}(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z) \,|\, z) \equiv 0$$

besteht die weitere Gleichung

$$\mathfrak{F}(f_1(\Omega z), f_2(\Omega z), \ldots, f_m(\Omega z) \,|\, \Omega z)$$
$$\equiv \mathfrak{F}\left(\frac{f_1(z)-b_1(z)}{a_1}, \frac{f_2(z)-b_2(z)}{a_2}, \ldots, \frac{f_m(z)-b_m(z)}{a_m} \,\Big|\, \Omega z\right) \equiv 0.$$

Das Polynom

$$\mathfrak{F}\left(\frac{w_1-b_1(z)}{a_1}, \frac{w_2-b_2(z)}{a_2}, \ldots, \frac{w_m-b_m(z)}{a_m} \,\Big|\, \Omega z\right)$$

hat denselben Rang wie das Polynom

$$\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z);$$

es gibt daher eine rationale Funktion

$$\mathfrak{F}^*(z) \not\equiv 0$$

in den Veränderlichen z_α allein, so daß die Differenz

$$\mathfrak{F}\left(\frac{w_1-b_1(z)}{a_1}, \frac{w_2-b_2(z)}{a_2}, \ldots, \frac{w_m-b_m(z)}{a_m} \,\Big|\, \Omega z\right) - \mathfrak{F}^*(z)\,\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z)$$

niedereren Rang hat. Nach der Minimalannahme über $\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z)$ ist das nur dann möglich, wenn diese Differenz in allen Veränderlichen identisch verschwindet, und somit ist

$$\mathfrak{F}\left(\frac{w_1-b_1(z)}{a_1}, \frac{w_2-b_2(z)}{a_2}, \ldots, \frac{w_m-b_m(z)}{a_m} \,\Big|\, \Omega z\right) \equiv \mathfrak{F}^*(z)\,\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z).$$

5. Aus den früheren Annahmen folgt, daß keine der Funktionen $f_\mu(z)$ identisch verschwindet. Da $\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z)$ eine der Veränderlichen w_μ von mindestens erstem Grad enthält, so müssen in der Entwicklung

$$\mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z) = \sum_{\alpha} A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}(z)\, w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \ldots w_m^{\alpha_m}$$

nach Potenzen von $w_1, w_2, \ldots, w_m$ mindestens zwei Summanden

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}(z)\, w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2} \ldots w_m^{\alpha_m}, \qquad A_{\bar\alpha_1 \bar\alpha_2 \ldots \bar\alpha_m}(z)\, w_1^{\bar\alpha_1} w_2^{\bar\alpha_2} \ldots w_m^{\bar\alpha_m}$$

verschiedenen Ranges und mit

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}(z) \not\equiv 0, \qquad A_{\bar\alpha_1 \bar\alpha_2 \ldots \bar\alpha_m}(z) \not\equiv 0$$

vorhanden sein. Für sie seien diejenigen vom höchsten und einerhöchsten Rang ausgewählt. Die erste nichtverschwindende der Differenzen

$$\alpha_1 - \bar\alpha_1,\ \alpha_2 - \bar\alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m - \bar\alpha_m$$

ist positiv; eine von ihnen verschwindet wirklich nicht.

Mit α sei die Summe aller positiven Differenzen $\alpha_\mu - \bar{\alpha}_\mu$, mit $\bar{\alpha}$ die Summe aller negativen Differenzen $\alpha_\mu - \bar{\alpha}_\mu$ bezeichnet; offenbar ist

$$\alpha \geqq 1, \quad \bar{\alpha} \leqq 0.$$

6. Es seien drei Fälle unterschieden.

1. Fall. Mindestens eine der Zahlen α und $-\bar{\alpha}$ ist größer als Eins. Sei etwa $\alpha \geqq 2$; ferner möge $\alpha_\mu - \bar{\alpha}_\mu \geqq 1$ sein. Dann ist

$$\Phi(w_1 w_2 \dots w_m | z) \equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m-1}}{\partial w_1^{\alpha_1} \dots \partial w_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots \partial w_m^{\alpha_m}} \mathfrak{F}(w_1 w_2 \dots w_m | z)$$
$$= \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(z) w_\mu,$$

da alle anderen Summanden herausfallen. Es besteht die Funktionalgleichung

$$\Phi\left(\frac{w_1 - b_1(z)}{a_1}, \frac{w_2 - b_2(z)}{a_2}, \dots, \frac{w_m - b_m(z)}{a_m} \middle| \Omega z\right)$$
$$\equiv a_1^{\alpha_2} \dots a_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots a_m^{\alpha_m} \mathfrak{F}^*(z) \Phi(w_1 w_2 \dots w_m | z)$$

oder ausgeschrieben

$$A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(\Omega z) \left(\frac{w_\mu - b_\mu(z)}{a_\mu}\right) \equiv a_1^{\alpha_1} \dots a_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots a_m^{\alpha_m} \mathfrak{F}^*(z) A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(z) w_\mu.$$

Diese Gleichung ist aber gewiß falsch, da $b_\mu(z)$ nicht identisch verschwindet. Genau so gelangt man zu einem Widerspruch, wenn $\bar{\alpha} \leqq -2$ ist.

2. Fall. Die beiden Zahlen α und $-\bar{\alpha}$ sind gleich Eins.

In diesem Fall sei etwa

$$\alpha_\mu - \bar{\alpha}_\mu = 1, \quad \alpha_\nu - \bar{\alpha}_\nu = -1, \qquad \mu > \nu,$$

während alle anderen Differenzen verschwinden. Dann ist

$$\Phi(w_1 w_2 \dots w_m | z) \equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m-1}}{\partial w_1^{\alpha_1} \dots \partial w_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots \partial w_m^{\alpha_m}} \mathfrak{F}(w_1 w_2 \dots w_m | z)$$
$$= \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(z) w_\mu + \bar{\alpha}_1! \bar{\alpha}_2! \dots \bar{\alpha}_m! A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots \bar{\alpha}_m}(z) w_\nu,$$

da die anderen Summanden wieder herausfallen. Es besteht die Gleichung

$$\Phi\left(\frac{w_1 - b_1(z)}{a_1}, \frac{w_2 - b_2(z)}{a_2}, \dots \frac{w_m - b_m(z)}{a_m} \middle| \Omega z\right)$$
$$\equiv a_1^{\alpha_1} \dots a_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots a_m^{\alpha_m} \mathfrak{F}^*(z) \Phi(w_1 w_2 \dots w_m | z)$$

oder ausgeschrieben

$$\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(\Omega z) \left(\frac{w_\mu - b_\mu(z)}{a_\mu}\right) + \bar{\alpha}_1! \bar{\alpha}_2! \dots \bar{\alpha}_m! A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots \bar{\alpha}_m}(\Omega z) \left(\frac{w_\nu - b_\nu(z)}{a_\nu}\right)$$
$$\equiv a_1^{\alpha_1} \dots a_\mu^{\alpha_\mu - 1} \dots a_m^{\alpha_m} \mathfrak{F}^*(z) \left(\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_m! A_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(z) w_\mu + \bar{\alpha}_1! \bar{\alpha}_2! \dots \bar{\alpha}_m! A_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots \bar{\alpha}_m}(z) w_\nu\right).$$

Vergleich der entsprechenden Koeffizienten zeigt, daß erstens

$$R(\Omega z) = \frac{a_\mu}{a_\nu} R(z), \qquad R(z) \equiv - \frac{\bar{\alpha}_1!\,\bar{\alpha}_2!\dots\bar{\alpha}_m!\,A_{\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\dots\bar{\alpha}_m}(z)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_m!\,A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(z)}$$

und zweitens

$$R(\Omega z) = \frac{b_\mu(z)}{a_\mu} : \frac{b_\nu(z)}{a_\nu}$$

ist.

Die Funktionalgleichung

$$R(\Omega z) = \frac{a_\mu}{a_\nu} R(z)$$

hat aber nur dann eine rationale und nicht identisch verschwindende Lösung, wenn

$$\frac{a_\mu}{a_\nu} = 1$$

ist; alsdann ist die Lösung gleich einer beliebigen Konstanten $c_1 \neq 0$. Also ist nach der zweiten obigen Gleichung

$$b_\mu(z) \equiv c_1\, b_\nu(z)$$

und damit

$$f_\mu(z) \equiv c_1\, f_\nu(z) + c_2$$

mit einer weiteren Konstanten c_2.

3. Fall. Es ist $\alpha = 1$ und $\bar{\alpha} = 0$.

Sei etwa

$$\alpha_\mu - \bar{\alpha}_\mu = 1,$$

während die anderen Differenzen verschwinden. Sei ferner

$$\begin{aligned}\Phi(w_1 w_2 \dots w_m | z) &\equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m-1}}{\partial w_1^{\alpha_1}\dots\partial w_\mu^{\alpha_\mu-1}\dots\partial w_m^{\alpha_m}} \mathfrak{F}(w_1 w_2 \dots w_m | z)\\ &= \alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_m!\left(A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(z)\, w_\mu + \frac{1}{\alpha_\mu} A_{\alpha_1\dots\alpha_\mu-1\dots\alpha_m}(z)\right);\end{aligned}$$

die anderen Summanden sind durch die Differenzierung herausgefallen. Man hat die Funktionalgleichung

$$\begin{aligned}&\Phi\left(\frac{w_1 - b_1(z)}{a_1}, \frac{w_2 - b_2(z)}{a_2}, \dots, \frac{w_m - b_m(z)}{a_m} \middle| \Omega z\right)\\ &\qquad \equiv a_1^{\alpha_1}\dots a_\mu^{\alpha_\mu-1}\dots a_m^{\alpha_m}\, \mathfrak{F}^*(z)\, \Phi(w_1 w_2 \dots w_m | z)\end{aligned}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned}&A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(\Omega z)\, \frac{w_\mu - b_\mu(z)}{a_\mu} + \frac{1}{\alpha_\mu} A_{\alpha_1\dots\alpha_\mu-1\dots\alpha_m}(\Omega z)\\ &\qquad \equiv a_1^{\alpha_1}\dots a_\mu^{\alpha_\mu-1}\dots a_m^{\alpha_m}\, \mathfrak{F}^*(z)\left(A_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(z)\, w_\mu + \frac{1}{\alpha_\mu} A_{\alpha_1\dots\alpha_\mu-1\dots\alpha_m}(z)\right).\end{aligned}$$

Die endliche und nicht identisch verschwindende rationale Funktion

$$R(z) = -\frac{1}{a}\,\frac{A_{\alpha_1\ldots\alpha_\mu - 1\ldots\alpha_m}(z)}{A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}(z)}$$

genügt somit der Gleichung

$$R(z) = a_\mu R(\Omega z) + b_\mu(z)$$

und unterscheidet sich nur um eine Konstante von der Funktion $f_\mu(z)$, die also auch rational sein muß.

7. Die letzten Überlegungen haben zu folgendem Satz geführt:

Satz 1. *Zwischen den m Funktionen*

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots,\ f_m(z)$$

besteht dann und nur dann eine algebraische Gleichung

$$\mathfrak{F}(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)\,|\,z) = 0, \qquad \mathfrak{F}(w_1 w_2 \ldots w_m\,|\,z) \not\equiv 0,$$

wenn entweder eine von ihnen eine rationale Funktion ist, oder wenn zwei von ihnen einer Gleichung

$$f_\mu(z) \equiv c_1 f_\nu(z) + c_2$$

mit konstanten Koeffizienten c_1 und c_2 genügen und gleichzeitig

$$a_\mu = a_\nu$$

ist.

II.

8. Aus dem letzten Satz lassen sich Folgerungen über die Differentialgleichungen erhalten, denen die Funktionen $f_\mu(z)$ genügen.

Mit

$$o_1^{(\lambda)},\ o_2^{(\lambda)},\ \ldots,\ o_n^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

seien die Unterdeterminanten der Elemente der ersten Zeile von

$$\begin{vmatrix} o_{11} - \varrho_\lambda, & o_{12}, & \ldots, & o_{1n} \\ o_{21}, & o_{22} - \varrho_\lambda, & \ldots, & o_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ o_{n1}, & o_{n2}, & \ldots, & o_{nn} - \varrho_\lambda \end{vmatrix}$$

bezeichnet. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} o_1^{(1)}, & o_2^{(1)}, & \ldots, & o_n^{(1)} \\ o_1^{(2)}, & o_2^{(2)}, & \ldots, & o_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ o_1^{(n)}, & o_2^{(n)}, & \ldots, & o_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

ist von Null verschieden, denn sonst gäbe es n Zahlen $o_1, o_2, \ldots, o_n$, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so daß

$$\sum_{\alpha=1}^{n} o_\alpha^{(\lambda)} o_\alpha = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

ist. Die Koeffizienten in diesen Gleichungen sind algebraisch konjugiert; somit wären die Zahlen o_α alle gleich rationalen Zahlen wählbar, und die n Zahlen $o_1^{(\lambda)}, o_2^{(\lambda)}, \ldots, o_n^{(\lambda)}$ wären in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen linear abhängig; das ist aber falsch[2]).

9. Die n Operatoren

$$\mathbf{D}_\lambda = \sum_{\alpha=1}^{n} o_\alpha^{(\lambda)} z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen keiner homogenen linearen Gleichung mit konstanten Koeffizienten, die nicht alle verschwinden; aus ihnen lassen sich die Ausdrücke

$$z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

linear mit konstanten Koeffizienten zusammensetzen. Es ist

$$\mathbf{D}_\lambda \mathbf{D}_\mu = \mathbf{D}_\mu \mathbf{D}_\lambda = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} o_\alpha^{(\lambda)} o_\beta^{(\mu)} z_\alpha z_\beta \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} o_\alpha^{(\lambda)} o_\alpha^{(\mu)} z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}.$$

Bedeutet $f(z)$ eine beliebige analytische Funktion in den z_α, so ist

$$\mathbf{D}_\lambda f(z) = \sum_{\alpha=1}^{n} o_\alpha^{(\lambda)} f_{(\alpha)}(z), \qquad f_{(\alpha)}(z) = z_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} f(z)$$

und

$$\mathbf{D}_\lambda f(\Omega z) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} o_{\alpha\beta} o_\beta^{(\lambda)} z_\alpha^{(1)} f_{(\alpha)}(\Omega z) = \varrho_\lambda \sum_{\alpha=1}^{n} o_\alpha^{(\lambda)} z_\alpha^{(1)} f_\alpha(\Omega z), \qquad z^{(1)} = \Omega z.$$

Allgemeiner besteht die Beziehung

$$\mathbf{D}_1^{l_1} \ldots \mathbf{D}_n^{l_n} f(\Omega^k z) = \varrho_1^{l_1} \ldots \varrho_n^{l_n} \mathbf{D}_1^{l_1} \ldots \mathbf{D}_n^{l_n} f(z) \Big|_{\Omega^k z}.$$

Die Operatoren

$$\mathbf{D}_1^{l_1} \ldots \mathbf{D}_n^{l_n}$$

sind also gegenüber der Transformation

$$z \to \Omega^k z$$

bis auf einen konstanten Faktor invariant.

Die einzige im Nullpunkt reguläre Lösung der Gleichung

$$\mathbf{D}_1^{l_1} \ldots \mathbf{D}_n^{l_n} f(z) = 0$$

ist offenbar eine beliebige Konstante.

---

[2]) Siehe loc. cit. [1]) S. 348.

10. Sei

$$f(z)=\sum_{h_1=0}^{\infty}\sum_{h_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{h_n=0}^{\infty}f_{h_1h_2\ldots h_n}z_1^{h_1}z_2^{h_2}\ldots z_n^{h_n}$$

eine beliebige Funktion, die in der Umgebung des Nullpunktes regulär ist; sie genüge der Funktionalgleichung

$$f(z)=af(\Omega z)+b(z),$$

deren Koeffizienten eine Konstante $a\neq 0$ und eine rationale im Nullpunkt verschwindende Funktion $b(z)\not\equiv 0$ sind. Alsdann sind die abgeleiteten Funktionen

$$f_{l_1l_2\ldots l_n}(z)=\mathbf{D}_1^{l_1}\mathbf{D}_2^{l_2}\ldots\mathbf{D}_n^{l_n}f(z)\qquad(l_1,l_2,\ldots,l_n=0,1,2,\ldots)$$

gleichfalls in der Umgebung des Nullpunktes regulär und genügen der Funktionalgleichung derselben Art

$$f_{l_1l_2\ldots l_n}(z)=a\varrho_1^{l_1}\varrho_2^{l_2}\ldots\varrho_n^{l_n}f_{l_1l_2\ldots l_n}(\Omega z)+b_{l_1l_2\ldots l_n}(z),$$
$$b_{l_1l_2\ldots l_n}(z)=\mathbf{D}_1^{l_1}\mathbf{D}_2^{l_2}\ldots\mathbf{D}_n^{l_n}b(z).$$

Man kann daher auf irgend m aus der Reihe der Funktionen $f_{l_1l_2\ldots l_n}(z)$ ohne weiteres Satz 1 anwenden.

Ein Fall sei besonders angeführt. Wir nehmen an, daß die Zahlen $\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_n$ einer Gleichung mit rationalen Exponenten

$$\varrho_1^{l_1}\varrho_2^{l_2}\ldots\varrho_n^{l_n}=1$$

nur dann genügen, wenn diese Exponenten alle gleichzeitig verschwinden. Ferner sei keine der Funktionen $f_{l_1l_2\ldots l_n}(z)$ rational. Nach Satz 1 besteht dann zwischen endlich vielen dieser Funktionen keine algebraische Gleichung, deren Koeffizienten Polynome in den z_α sind. Nun lassen sich offenbar aus den Ableitungen

$$f_{l_1l_2\ldots l_n}(z)=\mathbf{D}_1^{l_1}\mathbf{D}_2^{l_2}\ldots\mathbf{D}_n^{l_n}f(z)\qquad\begin{pmatrix}l_1,l_2,\ldots,l_n=0,1,2,\ldots\\ l_1+l_2+\cdots+l_n\leqq l\end{pmatrix}$$

die sämtlichen partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial^{l_1+l_2+\cdots+l_n}f(z)}{\partial z_1^{l_1}\partial z_2^{l_2}\ldots\partial z_n^{l_n}}\qquad\begin{pmatrix}l_1,l_2,\ldots,l_n=0,1,2,\ldots\\ l_1+l_2+\cdots+l_n\leqq l\end{pmatrix}$$

linear zusammensetzen, so daß die Koeffizienten rationale Funktionen in den z_α sind. Die Funktion $f(z)$ ist also transzendental-transzendent.

11. Von den letzten Ergebnissen seien einige Anwendungen erwähnt.

Im einfachsten Fall $n=1$ handelt es sich um die Lösungen der m Funktionalgleichungen in der einen Veränderlichen z

$$f_\mu(z)=a\varrho^\mu f_\mu(z^\varrho)+b(z)\qquad(\mu=0,1,\ldots,m-1),$$

und zwar ist ϱ eine beliebige natürliche Zahl größer als Eins. Sind die sämtlichen Funktionen

$$f_\mu(z) = \mathbf{D}^\mu f(z)$$

irrational, so sind sie nach vorhin auch algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Funktionen von z. Speziell ergibt sich so z. B. die Transzendental-Transzendenz der Funktionen

$$f(z) = \sum_0^\infty z^{2^n}, \qquad f(z) = f(z^2) + z;$$

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^n}}, \qquad f(z) = f(z^2) + \frac{z}{1-z};$$

$$f(z) = \sum_0^\infty q(h) z^h = \frac{1}{1-z} \sum_0^\infty \frac{z^{2^n}}{1 + z^{2^n}}, \qquad ((1-z) f(z)) = ((1-z^2) f(z^2)) + \frac{z}{1+z};$$

$$q(h) = \text{diadischer Quersumme},$$

denn diese sämtlichen Funktionen sind nicht nur samt den Ableitungen $f_\mu(z)$ irrational, sondern sogar nicht über den Einheitskreis fortsetzbar.

Für den Fall mehrerer Veränderlichen sei die Reihe

$$f(z) = \sum_0^\infty z_1^{a_h} z_2^{a_{h+1}} \ldots z_n^{a_{h+n-1}}$$

genannt, wo

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad \ldots, \quad a_{n-2} = 0, \quad a_{n-1} = 1; \quad a_{k+n} = \sum_{h=1}^n c_h a_{k+n-h}$$

ist, die Zahlen

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

alle nichtnegativ und ganz rational sind und die Gleichungswurzeln der irreduziblen Gleichung

$$\Phi(\varrho) \equiv \varrho^n - c_1 \varrho^{n-1} - c_2 \varrho^{n-2} - \ldots - c_n = 0$$

der früheren Bedingung

$$\varrho_1 > \max(1, |\varrho_2|, \ldots, |\varrho_n|)$$

genügen. Besteht zwischen den Wurzeln keine Gleichung

$$\varrho_1^{l_1} \varrho_2^{l_2} \ldots \varrho_n^{l_n} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so ist die Funktion $f(z)$ transzendental-transzendent. Denn einerseits genügt diese Funktion der Gleichung

$$f(z) = f(\Omega z) + z_n, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & c_{n-1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & c_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & c_1 \end{pmatrix},$$

und andererseits ist sie nicht über den Rand des Gebietes

$$\Re(\log z_1 + \varrho_1 \log z_2 + \ldots + \varrho_1^{n-1} \log z_n) < 0$$

fortsetzbar.

Anders ist es dagegen z. B. bei der Reihe

$$f(z_1 z_2) = \sum_0^\infty z_1^{a_h} z_2^{a_{h+1}}, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ \ldots,\ a_{h+1} = a_h + a_{h-1}.$$

Hier ist

$$f(z_1, z_2) = f(z_2, z_1 z_2) + z_2; \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

die Gleichung

$$\Phi(\varrho) \equiv \begin{vmatrix} -\varrho & 1 \\ 1 & 1-\varrho \end{vmatrix} = \varrho^2 - \varrho - 1 = 0$$

hat die Wurzeln

$$\varrho_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), \qquad \varrho_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \qquad\qquad (\varrho_1 > 1,\ \varrho_1 > |\varrho_2|).$$

Offenbar ist

$$\varrho_1^2 \varrho_2^2 = 1.$$

Die Funktion

$$f_{l_1 l_2}(z_1 z_2) = \mathbf{D}_1^{l_1} \mathbf{D}_2^{l_2} f(z_1 z_2)$$

genügt der Gleichung

$$f_{l_1 l_2}(z_1 z_2) = \varrho_1^{l_1} \varrho_2^{l_2} f_{l_1 l_2}(z_2, z_1 z_2) + L_{l_1 l_2} \cdot z_2.$$

Dabei ist $L_{l_1 l_2} \neq 0$ eine reelle Konstante, die allein von l_1 und l_2 abhängt. Aus dieser Funktionalgleichung ergibt sich die Differentialgleichung

$$f_{22}(z_1 z_2) \equiv L_{22} f_{00}(z_1 z_2), \qquad \text{d. h.} \qquad L_{22} f(z_1 z_2) = \mathbf{D}_1^2 \mathbf{D}_2^2 f(z_1 z_2).$$

Die Funktion $f(z_1, z_2)$ ist also nicht transzendental-transzendent. Dagegen zeigt sich nach Satz 1, daß irgend m Ableitungen

$$f_{l_1^{(1)} l_2^{(1)}}(z_1 z_2), \quad f_{l_1^{(2)} l_2^{(2)}}(z_1 z_2), \quad \ldots, \quad f_{l_1^{(m)} l_2^{(m)}}(z_1 z_2)$$

dieser Funktion algebraisch unabhängig sind in bezug auf den Körper der rationalen Funktionen von z_1 und z_2, wenn keine zwei der Differenzen

$$l_1^{(1)} - l_2^{(1)}, \quad l_1^{(2)} - l_2^{(2)}, \quad \ldots, \quad l_1^{(m)} - l_2^{(m)}$$

gleich derselben geraden Zahl sind. Speziell sind also die Funktionen

$$\mathbf{D}_1^l f(z_1 z_2), \qquad \mathbf{D}_1^l \mathbf{D}_2 f(z_1 z_2), \qquad \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2^{l+1} f(z_1 z_2), \qquad \mathbf{D}_2^{l+1} f(z_1 z_2)$$
$$(l = 0, 1, 2, \ldots)$$

zu beliebig endlich vielen algebraisch unabhängig.

12. Endlich sei noch auf die Reihe

$$f(z) = f(z_1 z_2) = \sum_{h_1=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{[\omega h_1]} z_1^{h_1} z_2^{h_2}$$

eingegangen, in der ω eine positive quadratische irrationale Zahl ist. Es bedeutet keine Einschränkung, wenn der Kettenbruch von ω reinperiodisch und von gerader Periodenlänge angenommen wird. Alsdann ist die Differenz

$$f(z) - f(\Omega z) = b(z)$$

eine rationale Funktion von z_1 und z_2; Ω bedeutet die Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} p_\nu & q_\nu \\ p_{\nu-1} & q_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

und p_ν, q_ν, $p_{\nu-1}$, $q_{\nu-1}$ sind gewisse Näherungsnenner und -zähler von ω, zwischen welchen die Gleichungen

$$\omega = \frac{q_\nu + q_{\nu-1}\omega}{p_\nu + p_{\nu-1}\omega}, \qquad p_\nu q_{\nu-1} - q_\nu p_{\nu-1} = 1$$

bestehen. Es ist in diesem Fall

$$\varrho_1 = p_\nu + p_{\nu-1}\omega, \qquad \varrho_2 = q_{\nu-1} - p_{\nu-1}\omega \qquad (\varrho_1 > 1,\ \varrho_1 > |\varrho_2|).$$

Die früheren Annahmen sind also erfüllt [3]).

Man hat nun

$$\varrho_1 \varrho_2 = 1.$$

Ferner ist bekanntlich die Funktion $f(z_1, z_2)$ nicht in den ganzen Raum fortsetzbar, also auch keine der Funktionen

$$f_{l_1 l_2}(z_1, z_2) \qquad (l_1, l_2 = 0, 1, 2, \ldots),$$

so daß dieselben sämtlich irrational sind.

Der Formel

$$f_{l_1 l_2}(z_1 z_2) = \sum_{h_1=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{[\omega h_1]} (o_1^{(1)} h_1 + o_2^{(1)} h_2)^{l_1} (o_1^{(2)} h_1 + o_2^{(2)} h_2)^{l_2} z_1^{h_1} z_2^{h_2}$$

entnimmt man, daß keine zwei der Funktionen $f_{l_1 l_2}(z_1, z_2)$ einer linearen Gleichung

$$f_{l_1 l_2}(z_1 z_2) + c_1 f_{\bar{l}_1 \bar{l}_2}(z_1 z_2) + c_2 \equiv 0$$

mit konstanten Koeffizienten genügen; denn dann müßte

$$l_1 - l_2 = \bar{l}_1 - \bar{l}_2$$

und für alle Werte von h_1 und h_2, über die summiert wird, die Form

$$(o_1^{(1)} h_1 + o_2^{(1)} h_1)(o_1^{(2)} h_1 + o_2^{(2)} h_2)$$

gleich derselben Zahl sein, und das ist falsch.

---

[3]) Siehe loc. cit. [1]), S. 363.

Satz 1 darf also angewandt werden, und man erhält:

„Beliebig endlich viele der Funktionen

$$f_{l_1 l_2}(z_1 z_2) \qquad (l_1, l_2 = 0, 1, 2, \ldots)$$

sind algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Funktionen. Die Funktion $f(z_1, z_2)$ ist daher transzendental-transzendent."

13. Satz 1 macht eine Aussage über die Abhängigkeit von Funktionen in bezug auf den Körper der rationalen Funktionen in den z_α. Wird etwa für eine dieser Veränderlichen ein spezieller Zahlwert eingesetzt, so läßt sich zunächst gar nichts behaupten, z. B. über die Funktion einer Veränderlichen

$$f(z, 1) = \sum_{h=1}^{\infty} [\omega h] z^h.$$

Später wird sich jedoch als ein Nebenergebnis auch die Transzendental-Transzendenz dieser Funktion herausstellen.

III.

14. Satz 2. *Seien*

$$\mathsf{A}_\tau > 0 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

M verschiedene positive Zahlen,

$$A_\tau(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} A^{(\tau)}_{h_1 \ldots h_n} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

M Potenzreihen, die in der Umgebung des Nullpunktes konvergieren und nicht alle identisch verschwinden. Ist $\mathfrak{z}$ ein fester Punkt in $\mathfrak{U}$, so gibt es eine Folge K von ins Unendliche wachsenden natürlichen Zahlen

$$k_1, k_2, k_3, \ldots,$$

so daß für alle Zahlen k aus K

$$\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(\Omega^k \mathfrak{z}) \neq 0$$

ist [4]).

15. Nach 1. lassen sich die Glieder

$$A^{(\tau)}_{h_1 \ldots h_n} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

der Reihen

$$A_\tau(z) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} A^{(\tau)}_{h_1 \ldots h_n} z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

auf genau eine Art nach wachsenden Werten der Summe

$$\mathsf{H} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{c_{\alpha 1}}{c_{11}} h_\alpha$$

---

[4]) Zum folgenden Beweis vergleiche man meine Arbeit „Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in gewissen Punktfolgen", die demnächst in den Math. Annalen erscheint.

anordnen; dabei sind alle Glieder auszulassen, deren Koeffizient $A^{(\tau)}_{h_1 \ldots h_n}$ verschwindet. Da die M Reihen $A_\tau(z)$ nicht alle identisch verschwinden, so gibt es genau eine kleinste Zahl

$$\mathsf{H}_0 = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{c_{\alpha 1}}{c_{11}} h_\alpha^0 ,$$

so daß die M Koeffizienten

$$A^{(\tau)}_{h_1^0 \ldots h_n^0} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

nicht alle Null sind. Für alle anderen Summanden ist die zugehörige Zahl H mindestens gleich $\mathsf{H}_0 + \alpha$, wo α eine feste positive Zahl bedeutet.

16. Zuerst werde eine obere Schranke für

$$\Sigma_k = \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k \sum_{\mathsf{H} > \mathsf{H}_0} A^{(\tau)}_{h_1 \ldots h_n} \mathfrak{z}_1^{(k)\,h_1} \cdots \mathfrak{z}_n^{(k)\,h_n} \qquad (\mathfrak{z}^{(k)} = \Omega^k \mathfrak{z})$$

bestimmt. Nach bekannten Sätzen gibt es $n+1$ positive Zahlen

$$R_0, R_1, \ldots, R_n,$$

so daß für alle Werte der Indizes $h_1, h_2, \ldots, h_n, \tau$

$$|A^{(\tau)}_{h_1 \ldots h_n}| \leqq R_0 R_1^{h_1} \ldots R_n^{h_n}$$

ist. Wird weiter $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt, so ist gleichmäßig in den h_α

$$|\mathfrak{z}_1^{(k)\,h_1} \cdots \mathfrak{z}_n^{(k)\,h_n}| \leqq e^{\mathsf{H}(1-\varepsilon)\Lambda_0 \varrho_1^k}$$

für großes k, wobei

$$\Lambda_0 = \Re\Big(\sum_{\beta=1}^{n} c_{1\beta} \log \mathfrak{z}_\beta\Big) < 0$$

gesetzt wurde. Somit hat man

$$|\Sigma_k| < \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k \sum_{\mathsf{H} > \mathsf{H}_0} R_0 \Big(R_1 e^{\frac{c_{11}}{c_{11}}(1-\varepsilon)\Lambda_0 \varrho_1^k}\Big)^{h_1} \cdots \Big(R_n e^{\frac{c_{n1}}{c_{11}}(1-\varepsilon)\Lambda_0 \varrho_1^k}\Big)^{h_n}.$$

Die Summe $\sum\limits_{\mathsf{H} > \mathsf{H}_0}$ rechts ist bis auf endlich viele Glieder das Produkt von n geometrischen Reihen; für großes k spielen daher die Glieder mit möglichst kleinen H-Werten die Hauptrolle. Durch Verschlechtern der vorigen Abschätzung folgt für großes k

$$|\Sigma_k| \leqq e^{-\mathsf{H}_1 \frac{\varepsilon}{2} \Lambda_0 \varrho_1^k} e^{\mathsf{H}_1 \left(1-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}\right) \Lambda_0 \varrho_1^k} = e^{\mathsf{H}_1 (1-2\varepsilon) \Lambda_0 \varrho_1^k}.$$

H_1 ist dabei die kleinste der Zahlen H, die größer als H_0 ist.

Somit ist nach 15.:

$$|\Sigma_k| \leqq e^{(\mathsf{H}_0 + \alpha)(1-2\varepsilon)\Lambda_0 \varrho_1^k}.$$

17. Die Summe

$$\Sigma_k^0 = \left(\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_{h_1^0 \ldots h_n^0}^{\tau}\right) \mathfrak{z}_1^{(k)\, h_1^0} \ldots \mathfrak{z}_n^{(k)\, h_n^0}$$

der noch fehlenden Summanden läßt sich nach unten abschätzen. Zunächst ist für alle genügend großen natürlichen Zahlen k

$$\left| \mathfrak{z}_1^{(k)\, h_1^0} \ldots \mathfrak{z}_n^{(k)\, h_n^0} \right| \geqq e^{(\mathsf{H}_0 + \alpha\varepsilon)\, \Lambda_0\, \varrho_1^k}.$$

Weiter gibt es, wie in 18. gezeigt wird, eine Folge K von ins Unendliche wachsenden natürlichen Zahlen

$$k_1, k_2, k_3, \ldots$$

und eine positive Zahl c, so daß für k in K

$$\left| \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_{h_1^0 \ldots h_n^0}^{(\tau)} \right| \geqq c^k$$

ist. Erst recht ist in dieser Folge

$$\left| \Sigma_k^0 \right| \geqq e^{(\mathsf{H}_0 + 2\alpha\varepsilon)\, \Lambda_0\, \varrho_1^k},$$

und wenn

$$\mathsf{H}_0 + 2\alpha\varepsilon < (\mathsf{H}_0 + \alpha)(1 - 2\alpha\varepsilon), \qquad \text{d. h.} \qquad \varepsilon < \frac{1}{2\,\mathsf{H}_0 + 2\alpha + 2}$$

angenommen wird:

$$\left| \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(\Omega^k \mathfrak{z}) \right| \geqq \left| \Sigma_k^0 \right| - \left| \Sigma_k \right| > 0,$$

wie es Satz 2 verlangt.

18. Um die obige Lücke auszufüllen, werde die erzeugende Funktion

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_{h_1^0 \ldots h_n^0}^{(\tau)} \right) u^k = \sum_{\tau=1}^{M} \frac{A_{h_1^0 \ldots h_n^0}^{(\tau)}}{1 - \mathsf{A}_\tau u}$$

benutzt. Als rationale Funktion hat sie einen Sinn in der ganzen u-Ebene. Offenbar ist $\varphi(u)$ nicht identisch gleich Null; da ferner $\varphi(\infty) = 0$ ist, so kann die Funktion auch nicht ein Polynom sein. Also besitzt $\varphi(u)$ mindestens einen Pol im Endlichen, so daß die Potenzreihe einen endlichen Konvergenzradius hat. Hieraus folgt bekanntlich die Existenz einer Folge K mit den oben benutzten Eigenschaften.

19. Seien die m Funktionen

$$f_\mu(z) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

Lösungen der Funktionalgleichungen

$$f_\mu(z) = a_\mu f_\mu(\Omega z) + b_\mu(z) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m);$$

zwischen ihnen bestehe keine algebraische Gleichung

$$\mathfrak{F}(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z) \mid z) \equiv 0.$$

Die vorigen Funktionalgleichungen führen zu den allgemeineren Beziehungen

$$f_\mu(z) = a_\mu^k f_\mu(\Omega^k z) + b_\mu^{(k)}(z) \qquad (\mu = 1, 2, .., m)$$

mit den rationalen Funktionen

$$b_\mu^{(k)}(z) = \sum_{h=0}^{k-1} a_\mu^h b_\mu(\Omega^h z) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

die ihrerseits sich in der geschlossenen Form

$$b_\mu^{(k)}(z) = f_\mu(z) - a_\mu^k f_\mu(\Omega^k z) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

darstellen lassen. Die Zahlen $a_1, \ldots, a_m$ seien von jetzt ab alle positiv angenommen.

Mit $t_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$ seien endlich viele Parameter bezeichnet; ihre Indizes seien nichtnegative ganze rationale Zahlen, und mit $t_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$ komme auch $t_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m}$ vor, wenn

$$0 \leqq \beta_1 \leqq \alpha_1, \quad 0 \leqq \beta_2 \leqq \alpha_2, \quad \ldots, \quad 0 \leqq \beta_m \leqq \alpha_m$$

ist. Die Funktion

$$F(z \mid t) = \sum_\alpha t_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m} f_1(z)^{\alpha_1} f_2(z)^{\alpha_2} \ldots f_m(z)^{\alpha_m}$$

ist dann und nur dann identisch gleich Null, wenn alle Parameter $t_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m}$ gleichzeitig verschwinden. Dieser Fall sei im folgenden ausgeschlossen.

Setzt man

$$t^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = (a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m})^k \sum_\beta \binom{\beta_1}{\alpha_1} \ldots \binom{\beta_m}{\alpha_m} b_1^{(k)}(z)^{\beta_1 - \alpha_1} \ldots b_m^{(k)}(z)^{\beta_m - \alpha_m} t_{\beta_1 \ldots \beta_m},$$

so besteht die Funktionalgleichung

$$F(z \mid t) = F(\Omega^k z \mid t^{(k)}).$$

Die Funktion $F(z \mid t)$ bleibt also ungeändert, wenn z in $\Omega^k z$ und gleichzeitig $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ in $t^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ übergeht.

Für keinen Wert von k sind die transformierten Parameter $t^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ alle gleich Null. Denn ist $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ von Null verschieden und so gewählt, daß es keinen nichtverschwindenden Parameter $t_{\beta_1 \ldots \beta_m}$ mit

$$\beta_1 \geqq \alpha_1, \quad \beta_2 \geqq \alpha_2, \quad \ldots, \quad \beta_m \geqq \alpha_m$$

gibt, so ist auch

$$t^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = (a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m})^k t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} \neq 0.$$

20. Sei z ein veränderlicher Punkt, $\mathfrak{z}$ ein fester im Innern von $\mathfrak{u}$; unter $\mathfrak{u}$ ist dabei die Teilmenge von $\mathfrak{U}$ zu verstehen, für deren Punkte keine der Gleichungen

$$b_\mu^*(\Omega^k z) = 0 \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots, m \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

erfüllt ist, wo $b_\mu^*(z)$ den Nenner der rationalen Funktion $b_\mu(z)$ bezeichnet. Seien ferner $t_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ veränderliche und $\mathrm{t}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ feste Parameterwerte, die nicht alle gleichzeitig verschwinden.

Definition. Wenn ein Polynom

$$A(z\,|\,t)$$

in den z_α und den $t_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ von einem k ab der Gleichung

$$A(\Omega^k\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t}^{(k)})=0$$

genügt, so heiße es äquivalent Null gemäß $(\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t})$:

$$A(z\,|\,t)\sim 0\,(\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t}).$$

Gibt es dagegen beliebig große Werte von k, für die die vorige Gleichung nicht erfüllt ist, so heiße es nichtäquivalent Null gemäß $(\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t})$:

$$A(z\,|\,t)\nsim 0\,(\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t}).$$

21. Der Begriff der Äquivalenz genügt folgenden einfachen Regeln:

a) *Wenn*

$$A(z\,|\,t)\sim 0\,(\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t})\quad \textit{und}\quad B(z\,|\,t)\sim 0\,(\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t})$$

ist, so ist auch

$$A(z\,|\,t)+B(z\,|\,t)\sim 0\,(\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t}).$$

b) *Wenn*

$$A(z\,|\,t)\sim 0\,(\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t})$$

ist und $B(z\,|\,t)$ ein beliebiges Polynom bedeutet, so ist auch

$$A(z\,|\,t)\,B(z\,|\,t)\sim 0\,(\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t}).$$

Der Beweis für beide Eigenschaften ergibt sich unmittelbar aus der vorigen Definition.

22. Das Polynom $A(z\,|\,t)$ sei äquivalent Null gemäß $(\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t})$, also von einem k ab:

$$A(\Omega^k\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t}^{(k)})=0.$$

Setzt man für die $\mathrm{t}^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}$ ihren Wert

$$\mathrm{t}^{(k)}_{\alpha_1\ldots\alpha_m}=(a_1^{\alpha_1}\ldots a_m^{\alpha_m})^k\sum_\beta\binom{\beta_1}{\alpha_1}\cdots\binom{\beta_m}{\alpha_m}\times$$
$$\times\{f_1(\mathfrak{z})-a_1^k f_1(\Omega^k\mathfrak{z})\}^{\beta_1-\alpha_1}\cdots\{f_m(\mathfrak{z})-a_m^k f_m(\Omega^k\mathfrak{z})\}^{\beta_m-\alpha_m}\,\mathrm{t}_{\beta_1\ldots\beta_m}$$

als Funktion von k ein, so geht der Ausdruck

$$A(\Omega^k\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t}^{(k)})$$

über in eine Summe

$$A(\Omega^k\mathfrak{z}\,|\,\mathrm{t}^{(k)})\equiv\sum_{\tau=1}^{M}\mathsf{A}_\tau^k A_\tau(f_1(\Omega^k\mathfrak{z})\ldots f_m(\Omega^k\mathfrak{z})\,|\,\Omega^k\mathfrak{z}).$$

Dabei sind

$$\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_M, \qquad \mathsf{A}_\tau > 0 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

lauter positive voneinander verschiedene Zahlen, die sich als Produkte der Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

darstellen lassen, und

$$A_\tau(w_1, w_2, \ldots, w_m \mid z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

ebenso viele Polynome in den z_α und $w_1, w_2, \ldots, w_m$; ihre Koeffizienten hängen noch von den Konstanten $\mathfrak{z}_\alpha$ und $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ ab, nicht aber von k. Nach Satz 2 kann nur dann von einem k ab

$$\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(f_1(\Omega^k \mathfrak{z}), \ldots, f_m(\Omega^k z) \mid \Omega^k \mathfrak{z}) = 0$$

sein, wenn identisch in den z_α

$$A_\tau(f_1(z), \ldots, f_m(z) \mid z) \equiv 0 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

ist. Nun sind die Funktionen $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ nach Annahme algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Funktionen in den z_α. Also verschwindet jedes der M Polynome

$$A_\tau(w_1 \ldots w_m \mid z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

identisch in den z_α und w_μ.

Hieraus folgt weiter, daß für jede nichtnegative ganze rationale Zahl k auch das Polynom

$$\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(w_1 \ldots w_m \mid z) \equiv A(z \mid T^{(k)});$$

$$T^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = (a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m})^k \sum_{\beta} \binom{\beta_1}{\alpha_1} \cdots \binom{\beta_m}{\alpha_m} \times$$

$$\times \{f_1(\mathfrak{z}) - a_1^k w_1\}^{\beta_1 - \alpha_1} \ldots \{f_m(\mathfrak{z}) - a_m^k w_m\}^{\beta_m - \alpha_m} \mathfrak{t}_{\beta_1 \ldots \beta_m}$$

identisch verschwindet, folglich ebenso das Polynom

$$A(z \mid \mathfrak{T}^{(k)}),$$

wo

$$\mathfrak{T}^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = (a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m})^k \sum_{\beta} \binom{\beta_1}{\alpha_1} \cdots \binom{\beta_m}{\alpha_m} w_1^{\beta_1 - \alpha_1} \ldots w_m^{\beta_m - \alpha_m} \mathfrak{t}_{\beta_1 \ldots \beta_m}$$

gesetzt ist. Umgekehrt ist

$$A(z \mid t) \sim 0(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}),$$

wenn für jedes k in den z_α und w_u

$$A(z \mid \mathfrak{T}^{(k)}) \equiv 0$$

ist; die beiden Beziehungen sind somit gleichwertig.

23. Das Polynom $A(z \mid \mathfrak{T}^{(k)})$ hängt wohl von $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ und k ab, aber nicht mehr von $\mathfrak{z}_\alpha$; es gilt also:

c) *Wenn*

$$A(z \mid t) \sim 0(\mathfrak{z} \mid \mathfrak{t})$$

ist, wenn ferner $\mathfrak{z}^*$ *einen beliebigen anderen Punkt in* $\mathfrak{U}$ *bedeutet, so ist auch*

$$A(z \mid t) \sim 0(\mathfrak{z}^* \mid \mathfrak{t}).$$

Der Begriff der Äquivalenz ist also von den Zahlen $\mathfrak{z}_\alpha$ unabhängig, so daß im folgenden einfach

$$A(z \mid t) \sim 0(\mathfrak{t}) \quad \text{bzw.} \quad A(z \mid t) \nsim (\mathfrak{t})$$

geschrieben werden darf.

Damit das Polynom $A(z \mid t)$ äquivalent Null ist, braucht es nur scheinbar unendlich vielen Bedingungen zu genügen. Wenn man nämlich in $A(z \mid \mathfrak{T}^{(k)})$ den obigen Wert für $\mathfrak{T}^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ einsetzt, so geht das Polynom über in

$$A(z \mid \mathfrak{T}^{(k)}) = \sum_{\tau=1}^{M'} \mathsf{A}_\tau'^{k} A_\tau'(w_1 \ldots w_m \mid z).$$

Dabei sind

$$\mathsf{A}_\tau' > 0 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M')$$

M' verschiedene positive Zahlen, die sich als Produkte der Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

darstellen lassen,

$$A_\tau'(w_1 \ldots w_m \mid z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M')$$

ebenso viele Polynome in $z_\alpha, w_1, w_2, \ldots, w_m$, deren Koeffizienten von $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$, aber weder von k noch von den Zahlen $\mathfrak{z}_\alpha$ abhängen. Damit die rechte Seite für jede genügend große natürliche Zahl k identisch verschwindet, müssen also die sämtlichen M' Polynome

$$A_\tau'(w_1 \ldots w_m \mid z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M')$$

identisch verschwinden, womit die gesuchten endlich vielen Bedingungen bestimmt sind.

Aus diesem Kriterium folgt insbesondere:

d) *Wenn das Polynom* $A(z \mid t)$ *die abbrechende Potenzreihe*

$$A(z \mid t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \ldots h_n}(t) z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

hat, so ist dann und nur dann

$$A(z \mid t) \sim 0(\mathfrak{t}),$$

wenn die Äquivalenzen

$$A_{h_1 \ldots h_n}(t) \sim 0(\mathfrak{t}), \qquad (h_1 \ldots h_n = 0, 1, \ldots)$$

bestehen.

24. Hilfssatz. Seien

$$\mathsf{A}_\tau > 0 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

M verschiedene positive Zahlen und

$$\mathbf{L}_k = \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau, \qquad \mathbf{L}_\tau^* = \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k B_\tau$$

zwei lineare Formen in ihren k-ten Potenzen. Wenn für jede genügend große natürliche Zahl k eine der beiden Formen $\mathbf{L}_k$ und $\mathbf{L}_k^*$ verschwindet, so verschwindet auch für jedes genügend große k entweder $\mathbf{L}_k$ oder $\mathbf{L}_k^*$ allein.

Zum Beweis seien N positive Zahlen

$$\overline{\mathsf{A}}_1, \overline{\mathsf{A}}_2, \ldots, \overline{\mathsf{A}}_N \qquad\qquad \overline{\mathsf{A}}_\sigma > 0$$

eingeführt, zwischen denen keine Gleichung

$$\overline{\mathsf{A}}_1^{l_1} \overline{\mathsf{A}}_2^{l_2} \ldots \overline{\mathsf{A}}_N^{l_N} = 1$$

mit ganzen rationalen Exponenten besteht, die nicht alle gleichzeitig verschwinden; in ihnen möge

$$\mathsf{A}_\tau = \prod_{\sigma=1}^{N} \overline{\mathsf{A}}_\sigma^{l_{\tau\sigma}} \qquad\qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

sein und die Matrix $(l_{\tau\sigma})$ habe ganze rationale Elemente. Offenbar ist $N \leqq M$.

Durch diese Umformung wird

$$\mathbf{L}_k = \left(\overline{\mathsf{A}}_1^{-f_1} \ldots \overline{\mathsf{A}}_N^{-f_N}\right)^k \mathbf{L}\left(\overline{\mathsf{A}}_1^k, \ldots, \overline{\mathsf{A}}_N^k\right); \qquad \mathbf{L}_k^* = \left(\overline{\mathsf{A}}_1^{-f_1^*} \ldots \overline{\mathsf{A}}_N^{-f_N^*}\right)^k \mathbf{L}^*\left(\overline{\mathsf{A}}_1^k, \ldots, \overline{\mathsf{A}}_N^k\right);$$

dabei sind die f nichtnegative ganze rationale Zahlen und

$$\mathbf{L}(U_1 \ldots U_N), \qquad \mathbf{L}^*(U_1 \ldots U_N)$$

zwei Polynome in $U_1, U_2, \ldots, U_N$. Das Produktpolynom

$$\mathbf{L}(U_1 \ldots U_N)\, \mathbf{L}^*(U_1 \ldots U_N)$$

besitze genau $\mathbf{L}$ Koeffizienten; die $\mathbf{L}$ homogenen linearen Gleichungen

$$\mathbf{L}\left(\overline{\mathsf{A}}_1^{k+\varkappa} \ldots \overline{\mathsf{A}}_N^{k+\varkappa}\right) \mathbf{L}^*\left(\overline{\mathsf{A}}_1^{k+\varkappa} \ldots \overline{\mathsf{A}}_N^{k+\varkappa}\right) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, L)$$

für diese Koeffizienten, die bestehen, wenn k genügend groß ist, haben eine von Null verschiedene Determinante und folglich muß das Produktpolynom identisch verschwinden. Nach einem bekannten Satz aus der Algebra ist das nur dann möglich, wenn mindestens eins der Polynome

$$\mathbf{L}(U_1 \ldots U_N), \qquad \mathbf{L}^*(U_1 \ldots U_N)$$

identisch verschwindet; daraus ergibt sich die Behauptung.

25. Seien $A(z\,|\,t)$ und $B(z\,|\,t)$ zwei Polynome; die beiden Ausdrücke

$$A(z\,|\,\mathfrak{T}^{(k)}), \qquad B(z\,|\,\mathfrak{T}^{(k)})$$

mögen ausgerechnet gleich

$$A(z\,|\,\mathfrak{T}^{(k)}) = \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(w_1 \ldots w_m\,|\,z), \qquad B(z\,|\,\mathfrak{T}^{(k)}) = \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k B_\tau(w_1 \ldots w_m\,|\,z)$$

sein. Dabei sind

$$\mathsf{A}_\tau > 0, \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

endlichviele verschiedene positive Zahlen und

$$\left.\begin{array}{l} A_\tau(w_1 \ldots w_m \,|\, z) \\ B_\tau(w_1 \ldots w_m \,|\, z) \end{array}\right\} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

je ebenso viele Polynome in den $z_\alpha, w_1, w_2, \ldots, w_m$. Wenn weder die Polynome

$$A_\tau(w_1 \ldots w_m \,|\, z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M),$$

noch die Polynome

$$B_\tau(w_1 \ldots w_m \,|\, z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

alle gleichzeitig identisch verschwinden, so gibt es ein spezielles Wertsystem für die Veränderlichen, so daß mindestens je eins der Polynome in beiden Folgen ungleich Null ist. Die beiden Ausdrücke

$$\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(w_1 \ldots w_m \,|\, z), \qquad \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k B_\tau(w_1 \ldots w_m \,|\, z)$$

verschwinden also nicht für alle großen k in diesem Punkt, nach dem vorigen Hilfssatz auch nicht das Produkt

$$\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k A_\tau(w_1 \ldots w_m \,|\, z) \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k B_\tau(w_1 \ldots w_m \,|\, z).$$

Nach 23. folgt daher:

e) *Wenn die beiden Polynome*

$$A(z \,|\, t), \qquad B(z \,|\, t)$$

den Nichtäquivalenzen

$$A(z \,|\, t) \not\sim 0\,(\mathrm{t}), \qquad B(z \,|\, t) \not\sim 0\,(\mathrm{t})$$

genügen, so besteht die weitere Nichtäquivalenz

$$A(z \,|\, t)\, B(z \,|\, t) \not\sim 0\,(\mathrm{t}).$$ [4a)]

26. Um den Begriff der Äquivalenz auf Potenzreihen auszudehnen, werde nicht die Definition, die für Polynome angegeben wurde, einfach übertragen, sondern von der früheren Eigenschaft d ausgegangen:

Definition. Die Potenzreihe

$$A(z \,|\, t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

konvergiere in der Umgebung des Nullpunktes; ihre Koeffizienten seien Polynome in den $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ von beschränktem Grade. Wenn für ein System

---

[4a)] Anmerkung bei der Korrektur. Der Hilfssatz e) und damit der Hauptsatz bleibt bestehen, wenn die Zahlen a_μ nicht notwendig mehr reell sind, dafür aber angenommen wird, daß Ω^k die gleichen Eigenschaften 1. hat, wie Ω selbst, wenn k alle natürlichen Zahlen durchläuft. In den interessantesten Fällen $n = 1$ und $n = 2$ ist diese Annahme immer erfüllt.

von festen Parameterwerten $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ alle Äquivalenzen

$$A_{h_1 \ldots h_n}(t) \sim 0(\mathfrak{t}) \qquad (h_1, \ldots, h_n = 0, 1, 2, \ldots)$$

erfüllt sind, so heiße $A(z|t)$ äquivalent Null gemäß $(\mathfrak{t})$:

$$A(z|t) \sim 0(\mathfrak{t});$$

ist dagegen auch nur eine dieser Äquivalenzen nicht erfüllt, so heiße $A(z|t)$ nichtäquivalent Null gemäß $(\mathfrak{t})$:

$$A(z|t) \nsim 0(\mathfrak{t}).$$

Der neue Äquivalenzbegriff ist für Polynome vollständig mit dem früheren gleichwertig, wie aus c) und d) folgt. Bedeutet ferner $\mathfrak{z}$ einen Punkt im Innern von $\mathfrak{u}$, so folgt aus

$$A(z|t) \sim 0(\mathfrak{t}),$$

daß für alle genügend großen k

$$A(\Omega^k \mathfrak{z} | \mathfrak{t}^{(k)}) = 0$$

ist; die Umkehrung braucht aber nicht zu gelten. Die Eigenschaften a) und b) bleiben unverändert bestehen.

27. Der neue Äquivalenzbegriff besitzt weiter die Eigenschaft e). Zum Beweis dieser Tatsache wird ein weitergehendes Ergebnis gezeigt.

D e f i n i t i o n. Die kleinste Zahl h, für die die Potenzreihe

$$A(z|t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

einen Koeffizienten

$$A_{h_1 \ldots h_n}(\mathfrak{t}) \nsim 0(\mathfrak{t})$$

mit

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = h$$

hat, heiße ihr Index. Der Index ist dann und nur dann endlich, wenn die Reihe nichtäquivalent Null ist.

Sei h der endliche Index der Reihe

$$A(z|t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} A_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

und h^* der endliche Index der Reihe

$$B(z|t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} B_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}.$$

Sei ferner

$$A_h(z|t) = \sum_{\substack{h_1 \geqq 0 \\ h_1 + \ldots + h_n = h}}^{\infty} \cdots \sum_{h_n \geqq 0}^{\infty} A_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

und

$$B_{h^*}(z|t) = \sum_{\substack{h_1 \geqq 0 \\ h_1 + \ldots + h_n = h^*}}^{\infty} \cdots \sum_{h_n \geqq 0}^{\infty} B_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

gesetzt; beide Polynome sind nicht äquivalent Null, also auch nicht ihr Produkt

$$A_h(z \mid t)\, B_{h^*}(z \mid t).$$

Dieses Produkt enthält die sämtlichen Summanden der Exponentensumme $h + h^*$ von

$$A(z \mid t)\, B(z \mid t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} C_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

und offenbar kann diese Potenzreihe keine Glieder mit kleinerer Exponentensumme haben, die nicht äquivalent Null sind. Damit ist für endliche Indizes folgendes Ergebnis bewiesen, das trivial ist, wenn mindestens einer der Indizes unendlich groß ist:

f) *Der Index eines Produktes von Potenzreihen ist gleich der Summe der Indizes der Faktoren.*

IV.

28. Von jetzt ab bedeute $K(s)$ einen algebraischen Zahlkörper vom Grad K mit der erzeugenden Zahl s. Wir nehmen an, daß in ihm gleichzeitig alle folgenden Zahlen liegen:

i: Die Zahlen $\mathfrak{z}_\alpha$ und $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$.

ii: Die Zahlen a_μ und die Koeffizienten der rationalen Funktionen $b_u(z)$.

iii: Die Koeffizienten der Potenzreihen der Funktionen $f_u(z)$.

Ist $A(z \mid t)$ ein beliebiges Polynom mit Koeffizienten aus $K(s)$, so haben auch die Zahlen

$$\mathsf{A}_\tau > 0 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

und die Koeffizienten der Polynome

$$A_\tau(w_1 \ldots w_m \mid z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

in der Entwicklung

$$A(z \mid \mathfrak{T}^{(k)}) = \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k\, A_\tau(w_1 \ldots w_m \mid z)$$

Zahlwerte aus diesem Zahlkörper.

29. Es bedeute p eine nichtnegative ganze rationale Zahl und $A(p)$ die Menge aller Polynome $A(t)$ mit Koeffizienten aus $K(s)$, die in sämtlichen Veränderlichen $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ höchstens vom Grad p sind. Offenbar ist die Anzahl der Koeffizienten gleich

$$(p+1)^{\mathfrak{n}} = P(p);$$

dabei ist $\mathfrak{n}$ die Zahl der auftretenden Parameter $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$. Die Menge $A(p)$ bildet gegenüber der Addition eine Abelsche Gruppe über $K(s)$, die eine Basis aus genau $P(p)$ Elementen besitzt.

Sei $A_0(p)$ die Teilmenge der Polynome $A(t)$ aus $A(p)$, die der Äquivalenz

$$A(t) \sim 0(\mathfrak{t})$$

genügen. Diese Polynome sind dadurch ausgezeichnet, daß zwischen ihren Koeffizienten endlich viele homogene lineare Gleichungen bestehen. Von diesen möge es etwa $P_0(p)$ linear unabhängige geben. Die Zahl $P_0(p)$ hängt außer vom Körper $K(s)$ nur noch von den Zahlen $\mathfrak{t}_{\alpha_1\ldots,\alpha_m}$ und von p ab; sie genügt den Ungleichungen

$$1 \leqq P_0(p) \leqq P(p).$$

Nach früher bilden die Elemente von $A_0(p)$ gleichfalls eine Abelsche Gruppe über $K(s)$ gegenüber der Addition. Dieselbe besitzt eine endliche Basis aus genau $P_1(p) = P(p) - P_0(p)$ Elementen, falls diese Zahl positiv ist; andernfalls enthält $A_0(p)$ überhaupt nur das Element Null.

Seien $A(t)$ und $B(t)$ zwei beliebige Polynome aus $A(p)$; je nachdem ob

$$A(t) - B(t) \sim 0(\mathfrak{t})$$

oder

$$A(t) - B(t) \nsim 0(\mathfrak{t}),$$

seien beide einander äquivalent oder nichtäquivalent genannt:

$$A(t) \sim B(t)(\mathfrak{t}) \quad \text{bzw.} \quad A(t) \nsim B(t)(\mathfrak{t}).$$

Es bedeute $A_1(p)$ ein vollständiges Repräsentantensystem aller untereinander nicht äquivalenten Polynome $A(t)$ aus $A(p)$. Offenbar bilden die Elemente von $A_1(p)$ eine Abelsche Gruppe gegenüber der Addition, wenn einander äquivalente Polynome als nicht verschieden betrachtet werden; diese Gruppe ist gerade die Faktorgruppe von $A_0(p)$ in bezug auf $A(p)$. Auch $A_1(p)$ besitzt eine endliche Basis, und zwar aus genau $P_0(p)$ Elementen. Das allgemeine Glied von $A_1(p)$ hat die Gestalt

$$\sum_{\varrho=1}^{P_0(p)} q_\varrho Q_\varrho(t).$$

Dabei sind

$$q_1, q_2, \ldots, q_{P_0(p)}$$

beliebige Parameterwerte aus $K(s)$ und

$$Q_1(t), Q_2(t), \ldots, Q_{P_0(p)}(t)$$

ebenso viele Polynome aus $A_1(p)$; zwischen denselben besteht keine homogene lineare Äquivalenz

$$\sum_{\varrho=1}^{P_0(p)} q_\varrho^0 Q_\varrho(t) \sim 0(\mathfrak{t}),$$

in der die Zahlen q_ϱ^0 in $K(s)$ liegen und nicht alle verschwinden. Hieraus folgt noch, daß das allgemeine Element von $A(p)$ sich in der Gestalt

$$\sum_{\varrho=1}^{P_0(p)} q_\varrho Q_\varrho(t) + Q(t)$$

schreiben läßt, wobei $Q(t)$ irgendein Polynom aus $A_0(p)$ bedeutet.

30. Die Zahl $P_0(p)$ genügt für $p \geqq 1$ der Ungleichung

$$P_0(2p) \leqq 2^{\mathfrak{n}} P_0(p).$$

Denn offenbar läßt sich jedes Polynom aus $A(2p)$ in der Gestalt

$$A(t) = \sum_{\varkappa=1}^{2^{\mathfrak{n}}} \Bigl(\prod_\alpha t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}^{\tau^{(\varkappa)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}}\Bigr)^p A_\varkappa(t)$$

schreiben. Dabei durchlaufen in dem Produkt

$$\prod_\alpha t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}^{\tau^{(\varkappa)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}}$$

über die $\mathfrak{n}$ Parameter $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ die Exponentensysteme

$$(\tau^{(\varkappa)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, 2^{\mathfrak{n}})$$

alle $2^{\mathfrak{n}}$ möglichen Fälle, daß ihre Glieder einzeln Null oder Eins sind. Ferner sind die $A_\varkappa(t)$ einzeln gleich beliebigen voneinander unabhängigen Polynomen aus $A(p)$. Damit eins dieser Polynome äquivalent Null ist, sind $P_0(p)$ unabhängige homogene lineare Gleichungen für die Koeffizienten zu erfüllen. Damit sie alle äquivalent Null sind, genügt es also, gerade

$$2^{\mathfrak{n}} P_0(p)$$

unabhängige homogene lineare Gleichungen für sämtliche Koeffizienten zu erfüllen. Alsdann ist aber gewiß auch die Summe

$$A(t) = \sum_{\varkappa=1}^{2^{\mathfrak{n}}} \Bigl(\prod_\alpha t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}^{\tau^{(\varkappa)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}}\Bigr)^p A_\varkappa(t)$$

äquivalent Null, und daraus folgt unmittelbar die obige Ungleichung.

31. Die Koeffizienten der Potenzreihe

$$F(z \mid t) = \sum_\alpha t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} f_1(z)^{\alpha_1} \ldots f_m(z)^{\alpha_m} = \sum_{h_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{h_n=0}^{\infty} F_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

sind Linearformen in den $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$. Der Index h ist endlich, denn für keine Zahl k ist die Funktion $F(z \mid \mathfrak{t}^{(k)})$ identisch in den z_α gleich Null. Entsprechend sind die Koeffizienten in der Potenzreihe

$$F(z \mid t)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{h_n=0}^{\infty} F^{(l)}_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

Formen der Dimension l in den Parametern $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$; die Reihe hat den genauen Index hl.

Sei p eine große natürliche Zahl und seien

$$A_l(z \mid t) = \sum_{h_1=0}^{p} \cdots \sum_{h_n=0}^{p} A_{h_1 \ldots h_n}^{(l)}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

$p+1$ Polynome, die in bezug auf die Veränderlichen z_α und die Parameter $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ einzeln vom Grad p sind. Insgesamt treten also

$$(p+1)^{n+1}$$

Polynome

$$A_{h_1 \ldots h_n}^{(l)}(t) \qquad (l, h_1, \ldots, h_n = 0, 1, \ldots, p)$$

auf. Dieselben seien sämtlich in $A_1(p)$ gelegen, sind also durch zusammen

$$(p+1)^{n+1} P_0(p)$$

unabhängige Parameter mit Werten aus $K(s)$ bestimmt. Sind dieselben etwa gleich

$$q_{h_1 \ldots h_n}^{(\varrho, l)} \qquad \begin{pmatrix} l, h_1, \ldots, h_n = 0, 1, \ldots, p \\ \varrho = 1, 2, \ldots, P_0(p) \end{pmatrix},$$

so ist

$$A_{h_1 \ldots h_n}^{(l)}(t) = \sum_{\varrho=1}^{P_0(p)} q_{h_1 \ldots h_n}^{(\varrho, l)} Q_\varrho(t) \qquad (l, h_1, \ldots, h_n = 0, 1, \ldots, p).$$

In der Entwicklung

$$E(z \mid t) = \sum_{l=0}^{p} A_l(z \mid t)\, F(z \mid t)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} E_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

sind die Koeffizienten

$$E_{h_1 \ldots h_n}(t) \qquad (h_1, \ldots, h_n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Polynome aus der Menge $A(2p)$; sie hängen von den Zahlen

$$q_{h_1 \ldots h_n}^{(\varrho, l)} \qquad \begin{pmatrix} l, h_1, \ldots, h_n = 0, 1, \ldots, p \\ \varrho = 1, 2, \ldots, P_0(p) \end{pmatrix}$$

homogen und linear ab. Damit irgendeiner der Koeffizienten $E_{h_1 \ldots h_n}$ äquivalent Null ist, sind von den Zahlen $q_{h_1 \ldots h_n}^{(\varrho, l)}$ höchstens $P_0(2p)$ homogene lineare Gleichungen zu erfüllen. Damit $E(z \mid t)$ vom Index

$$H > c\, p^{1+\frac{1}{n}}$$

ist, wo c eine positive Zahl bedeutet, sind also höchstens

$$\left(c\, p^{1+\frac{1}{n}} + 1\right)^n P_0(2p) \leqq 2^{n+\mathfrak{n}} c^n (p+1)^{n+1} P_0(p)$$

homogene lineare Gleichungen von den

$$(p+1)^{n+1} P_0(p)$$

Zahlen

$$q_{h_1 \ldots h_n}^{(\varrho, l)} \qquad \begin{pmatrix} l, h_1, \ldots, h_n = 0, 1, \ldots, p \\ \varrho = 1, 2, \ldots, P_0(p) \end{pmatrix}$$

zu erfüllen. Nach bekannten Sätzen über homogene lineare Gleichungen ist das stets möglich, ohne daß die Zahlen $q^{(\varrho, l)}_{h_1 \ldots h_n}$ alle gleichzeitig verschwinden, wenn

$$(p+1)^{n+1} P_0(p) > c^n \cdot 2^{n+\mathfrak{n}} (p+1)^{n+1} P_0(p)$$

oder

$$c < 2^{-1-\frac{\mathfrak{n}}{n}}$$

vorausgesetzt wird, gewiß also für

$$c = 2^{-2-\frac{\mathfrak{n}}{n}}.$$

Damit ist gezeigt, daß es $p+1$ Polynome

$$A_0(z \mid t), \quad A_1(z \mid t), \quad \ldots, \quad A_p(z \mid t)$$

mit Zahlkoeffizienten $K(s)$ gibt, die nicht alle äquivalent Null sind und in sämtlichen Veränderlichen z_α und $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ höchstens den Grad p haben, so daß die Potenzreihe

$$E(z \mid t) = \sum_{l=0}^{p} A_l(z \mid t)\, F(z \mid t)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} E_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

vom Index

$$H > 2^{-2-\frac{\mathfrak{n}}{n}} p^{1+\frac{1}{n}}$$

ist.

32. Da die Polynome

$$A_l(z \mid t) \qquad (l = 0, 1, \ldots, p)$$

nicht alle äquivalent Null sind, so gibt es ein erstes von ihnen, das nicht-äquivalent Null ist. Sei etwa

$$A_l(z \mid t) \sim 0(\mathrm{t}) \quad \text{für} \quad h = 0, 1, \ldots, r-1; \quad A_r(z \mid t) \nsim 0(\mathrm{t}).$$

Die Zahl r hängt dabei noch von p ab und genügt der Ungleichung

$$0 \leqq r \leqq p.$$

Man setze

$$\mathfrak{A}_l(z \mid t) = A_{l+r}(z \mid t) \qquad (l = 0, 1, \ldots, p-r),$$
$$\mathfrak{A}_l(z \mid t) = 0 \qquad (l = p-r+1, \ldots, p)$$

und

$$\mathfrak{E}(z \mid t) = \sum_{l=0}^{p} \mathfrak{A}_l(z \mid t)\, F(z \mid t)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} z_n^{h_n}.$$

Der Index von $E(z \mid t)$ ist gleich H, also wegen

$$E(z \mid t) - F(z \mid t)^r\, \mathfrak{E}(z \mid t) \sim 0(\mathrm{t})$$

auch der Index von

$$F(z \mid t)^r\, \mathfrak{E}(z \mid t).$$

Sei ferner $\mathfrak{H}$ der Index von $\mathfrak{E}(z \mid t)$ und h der Index von $F(z \mid t)$; letztere Zahl ist nach 31. endlich. Nach der früher bewiesenen Eigenschaft des Index besteht die Gleichung

$$H = \mathfrak{H} + rh,$$

also erst recht die Ungleichung

$$\mathfrak{H} \geqq H - hp \geqq 2^{-2-\frac{\mathfrak{n}}{n}} p^{1+\frac{1}{n}} - hp$$

und für genügend großes p die weitere Ungleichung

$$\mathfrak{H} \geqq 2^{-3-\frac{\mathfrak{n}}{n}} p^{1+\frac{1}{n}}.$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz 3. *Zu jeder genügend großen natürlichen Zahl p gibt es $p+1$ Polynome*

$$\mathfrak{A}_0(z \mid t),\ \mathfrak{A}_1(z \mid t),\ \ldots,\ \mathfrak{A}_p(z \mid t)$$

mit folgenden Eigenschaften:

a) *Die Polynome sind in den z_α und $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ höchstens vom Grad p.*

b) *Ihre Koeffizienten sind Zahlen aus dem Körper $K(s)$.*

c) *Es ist*

$$\mathfrak{A}_0(z \mid t) \neq 0\,(\mathfrak{t}).$$

d) *Die Potenzreihe*

$$\mathfrak{E}(z \mid t) = \sum_{l=0}^{p} \mathfrak{A}_l(z \mid t)\, F(z \mid t)^l = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

ist vom Index

$$\mathfrak{H} \geqq 2^{-3-\frac{\mathfrak{n}}{n}} p^{1+\frac{1}{n}}.$$

V.

33. Das Polynom $\mathfrak{A}_0(z \mid \mathfrak{T}^{(k)})$, wo nach früher

$$\mathfrak{T}^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} = (a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m})^k \sum_{\beta} \binom{\beta_1}{\alpha_1} \cdots \binom{\beta_m}{\alpha_m} w_1^{\beta_1-\alpha_1} \ldots w_m^{\beta_m-\alpha_m}\, \mathfrak{t}_{\beta_1 \ldots \beta_m}$$

ist, läßt sich in folgender Gestalt darstellen:

$$\mathfrak{A}_0(z \mid \mathfrak{T}^{(k)}) \equiv \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k\, \mathfrak{A}_\tau(w_1 \ldots w_m \mid z).$$

Dabei sind

$$\mathsf{A}_\tau > 0 \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

M verschiedene Zahlen aus $K(s)$, die sich als Produkte der a_μ darstellen lassen, und

$$\mathfrak{A}_\tau(w_1 \ldots w_m \mid z) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M)$$

ebenso viele Polynome in den z_α und $w_1, w_2, \ldots, w_m$; ihre Koeffizienten liegen in $K(s)$ und hängen noch von p, nicht aber von k ab. Offenbar sind diese Polynome in den z_α einzeln höchstens vom Grad p; in den Veränderlichen w_μ dagegen sind sie höchstens vom Grad $\alpha_0 p$; dabei ist α_0 eine natürliche Zahl, die weder von p noch von k abhängt und gleich $\mathfrak{n}$-mal der größten auftretenden Indexsumme $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m$ von $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ gewählt werden darf.

Offenbar ist

$$\mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)}) = \sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k \mathfrak{A}_\tau(b_1^{(k)}(\mathfrak{z}), \ldots, b_m^{(k)}(\mathfrak{z}) \mid \Omega^k \mathfrak{z});$$

es gibt eine unendliche Folge natürlicher Zahlen k, für die

$$\mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)}) \neq 0$$

ist.

34. Es gibt eine erzeugende gebrochene Zahl s in $K(s)$, so daß gleichzeitig

a) die Zahlen $\mathfrak{z}_\mu$,

b) die Zahlen a_μ und die Koeffizienten der Polynome $b_\mu^*(z)$, $b_\mu^{**}(z)$,

c) die Zahlen A_τ und die Koeffizienten der Polynome $\mathfrak{A}_\tau(w_1 \ldots w_m \mid z)$ von der Gestalt

$$\sum_{\varkappa=1}^{K} \sigma_\varkappa s^\varkappa$$

mit ganzen rationalen Zahlen $\sigma_\varkappa$ sind. Dabei bedeutet $b_\mu^*(z)$ den Nenner, $b_\mu^{**}(z)$ den Zähler der rationalen Funktion $b_\mu(z)$.

Zur Abkürzung sei folgende Schreibweise eingeführt: Sind

$$\Phi(w_1 \ldots w_m \mid z_1 \ldots z_n \mid s), \quad \Psi(w_1 \ldots w_m \mid z_1 \ldots z_n \mid s)$$

zwei Polynome in $w_1, w_2, \ldots, w_m$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ und s, von denen das erste ganze rationale und das zweite nichtnegative Koeffizienten hat, und wenn der absolute Betrag eines Koeffizienten des ersten Polynoms höchstens gleich dem entsprechenden Koeffizienten des zweiten ist, so werde

$$\Phi(w \mid z \mid s) \ll \Psi(w \mid z \mid s)$$

gesetzt und $\Psi(w \mid z \mid s)$ eine Majorante des ersten genannt.

Offenbar gilt folgender Satz:

Ist

$$\Phi_\chi(w \mid z \mid s) \ll \Psi_\chi(w \mid z \mid s) \qquad (\chi = 1, 2, \ldots, j),$$

so ist auch

$$\sum_{\chi=1}^{j} \Phi_\chi(w \mid z \mid s) \ll \sum_{\chi=1}^{j} \Psi_\chi(w \mid z \mid s), \qquad \prod_{\chi=1}^{j} \Phi_\chi(w \mid z \mid s) \ll \prod_{\chi=1}^{j} \Psi_\chi(w \mid z \mid s).$$

Nach den Annahmen zu Anfang dieses Paragraphen ergibt sich leicht das Bestehen von Majoranten folgender Art:

$$\mathfrak{z}_\mu \ll \xi (1+s)^K \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

$$a_\mu \ll \eta (1+s)^K \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\mathsf{A}_\tau \ll \zeta (1+s)^K \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M),$$

$$b_\mu^*(z) \ll \Xi (1+s)^K \prod_{\alpha=1}^{n} (1+z_\alpha)^b \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

$$b_\mu^{**}(z) \ll \mathsf{H} (1+s)^K \prod_{\alpha=1}^{n} (1+z_\alpha)^b \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{A}_\tau (w_1 \ldots w_m \,|\, z) \ll \mathsf{Z} (1+s)^K \prod_{\mu=1}^{m} (1+w_\mu)^{\alpha_0 p} \prod_{\alpha=1}^{m} (1+z_\alpha)^p \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, M).$$

Dabei ist der Exponent b eine feste natürliche Zahl und es sind

$$\xi,\ \eta,\ \Xi,\ \mathsf{H}$$

feste positive Zahlen, die von p und k nicht abhängen, ζ und Z feste positive Zahlen, die von p, aber nicht von k abhängen.

35. Die rationalen Funktionen $b_\mu^{(k)}(z)$ haben den Wert

$$b_\mu^{(k)}(z) = \sum_{h=0}^{k-1} a_\mu^h \, b_\mu(\Omega^h z)$$

oder

$$b_\mu^{(k)}(z) = \frac{b_\mu^{**\,(k)}(z)}{b_\mu^{*\,(k)}(z)},$$

wenn

$$b_\mu^{*(k)}(z) = \prod_{h=0}^{k-1} b_\mu^*(\Omega^h z),$$

$$b_\mu^{**(k)}(z) = \sum_{h=0}^{k-1} a_\mu^h \, b_\mu^*(z) \ldots b_\mu^*(\Omega^{h-1} z)\, b_\mu^{**}(\Omega^h z)\, b_\mu^*(\Omega^{h+1} z) \ldots b_\mu^*(\Omega^{k-1} z)$$

gesetzt wird. Mit einer positiven Konstanten $c_1 \geqq 1$, die von p und k nicht abhängt, ist ferner[5])

$$\prod_{\alpha=1}^{n} (1 + z_\alpha^{(k)}) \ll \prod_{\alpha=1}^{n} (1 + z_\alpha)^{[c_1 \varrho_1^k]} \qquad (z^{(k)} = \Omega^k z).$$

Also gelangen wir für die beiden letzten Polynome zu folgenden Majoranten:

$$\left.\begin{aligned} b_\mu^{*(k)}(z) &\ll \Xi^k (1+s)^{kK} \prod_{\alpha=1}^{n} (1+z_\alpha)^{b e_k}, \\ b_\mu^{**(k)}(z) &\ll ((1+\eta)(\Xi + \mathsf{H}))^k (1+s)^{(2k-1)K} \prod_{\alpha=1}^{n} (1+z_\alpha)^{b e_k} \end{aligned}\right\} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m).$$

Dabei bedeutet e_k die Zahl

$$e_k = \sum_{h=0}^{k-1} [c_1 \varrho_1^k].$$

[5]) Zu den folgenden Abschätzungen vergleiche auch loc. cit. [1]), S. 354.

36. Auch das Produkt

$$\mathfrak{A}_\tau^{(k)}(z) = \prod_{\mu=1}^{m} b_\mu^{*(k)}(z)^{\alpha_0 p} \cdot \mathfrak{A}_\tau(b_1^{(k)}(z), \ldots, b_m^{(k)}(z) \mid \Omega^k z)$$

ist ein Polynom in den z_α und in s; es hat ferner ganze rationale Koeffizienten. Die Majoranten in 34. und 35. führen zu folgender Majorante für dasselbe:

$$\mathfrak{A}_\tau^{(k)}(z) \ll \mathsf{Z}((1+\eta)(\Xi + \mathsf{H}))^{m\alpha_0 p k}(1+s)^{K+K\alpha_0 m p(2k-1)} \times \\ \times \prod_{\alpha=1}^{n}(1+z_\alpha)^{b\alpha_0 m p e_k + [c_1 \varrho_1^k] p}.$$

Schließlich werde auch noch von der Darstellung der $\mathfrak{z}_\alpha$ durch die Zahl s Gebrauch gemacht; dann ergeben sich folgende Formeln:

$$\prod_{\mu=1}^{m} b_\mu^{*(k)}(\mathfrak{z})^{\alpha_0 p} \ll \Xi^{m\alpha_0 p k}(1+\xi)^{m n \alpha_0 p e_k}(1+s)^{K m \alpha_0 p k + K m n \alpha_0 p e_k},$$

$$\mathfrak{A}_\tau^{(k)}(\mathfrak{z}) \ll \mathsf{Z}((1+\eta)(\Xi+\mathsf{H}))^{m\alpha_0 p k}(1+\xi)^{b\alpha_0 m n p e_k + n[c_1\varrho_1^k]p} \times \\ \times (1+s)^{K + K\alpha_0 m p(2k-1) + K\alpha_0 m n p e_k + K n [c_1 \varrho_1^k] p},$$

$$\sum_{\tau=1}^{M} \mathsf{A}_\tau^k \, \mathfrak{A}_\tau^{(k)}(\mathfrak{z}) \ll M \mathsf{Z} \zeta^k ((1+\eta)(\Xi+\mathsf{H}))^{m\alpha_0 p k}(1+\xi)^{b\alpha_0 m n p e_k + n[c\varrho_1^k]p} \times \\ \times (1+s)^{K + K\alpha_0 m p(2k-1) + K\alpha_0 m n p e_k + K n[c_1\varrho_1^k]p + Kk}.$$

Damit ist bewiesen, daß es vier positive Zahlen c_2, c_3, c_4, c_5 gibt, die von p und k nicht abhängen, so daß für $p \geqq p_0$ und $k \geqq k_0(p)$

$$\prod_{\mu=1}^{m} b_\mu^{*(k)}(\mathfrak{z})^{\alpha_0 p} \ll e^{c_2 p \varrho_1^k}(1+s)^{p[c_3 \varrho_1^k]} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

und

$$\prod_{\mu=1}^{m} b_\mu^{*(k)}(\mathfrak{z})^{\alpha_0 p} \cdot \mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)}) \ll e^{c_4 p \varrho_1^k}(1+s)^{p[c_5 \varrho_1^k]} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ist. Nach 20. verschwinden die Zahlen

$$b_\mu^{*(k)}(\mathfrak{z}) \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, 2, \ldots, \\ \mu = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix},$$

alle nicht, da der Punkt $\mathfrak{z}$ in der Punktmenge $\mathfrak{u}$ liegt. Nach Satz 3 ist ferner

$$\mathfrak{A}_0(z \mid t) \not\sim 0(\mathfrak{t});$$

es gibt also eine unendliche Folge von natürlichen Zahlen k, für die auch

$$\mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)})$$

und folglich

$$\prod_{\mu=1}^{m} b_\mu^{*(k)}(\mathfrak{z})^{\alpha_0 p} \cdot \mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \mid \mathfrak{t}^{(k)})$$

nicht verschwindet.

37. Wenn eine Zahl aus $K(s)$ die Majorante

$$o \ll \omega \sum_{\varkappa=0}^{O} s^{\varkappa}$$

besitzt, so ist sie absolut höchstens gleich

$$|o| \leqq \omega \sum_{\varkappa=0}^{O} |s|^{\varkappa} \leqq \omega(1+|s|)^{O}.$$

Wenn dieselbe Zahl ferner von Null verschieden ist, so gestattet ihr absoluter Betrag folgende Abschätzung nach unten [6]):

$$|o| \geqq \frac{1}{S^{KO}} \cdot \frac{1}{\omega^{K-1} \prod_{f=2}^{K} (1+|s_f|)^{O}}.$$

Dabei bedeuten

$$s_1 = s,\ s_2,\ \ldots,\ s^K$$

die K zu s konjugierten Zahlen, und S den Nenner dieser Zahlen.

Aus den Majoranten zu Ende des vorigen Paragraphen folgt also, daß

$$\left| \prod_{\mu=1}^{m} b_{\mu}^{*(k)}(\mathfrak{z}) \right| \leqq e^{c_6 p \varrho_1^k}$$

und

$$\left| \prod_{\mu=1}^{m} \mathfrak{b}_{\mu}^{*(k)}(\mathfrak{z})^{\alpha_{\mu} p} \cdot \mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)}) \right| \geqq e^{-c_7 p \varrho_1^k}$$

ist, wenn p genügend groß ist und k bei der ersten Ungleichung oberhalb einer von p abhängigen Schranke liegt, bei der zweiten eine von p abhängige unendliche Folge durchläuft. c_6 und c_7 bedeuten dabei zwei positive Zahlen, die von p und k nicht abhängen.

Mittels dieser beiden Abschätzungen gelangt man zur

1. Ungleichung. Ist p eine genügend große natürliche Zahl, durchläuft ferner die natürliche Zahl k eine gewisse von p abhängige unendliche Zahlfolge, so besteht die Ungleichung

$$|\mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)})| \geqq e^{-c_8 p \varrho_1^k}$$

mit einer positiven Zahl c_8, die von p und k nicht abhängt.

38. In der Potenzreihe

$$\mathfrak{E}(z\,|\,t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{h_n=0}^{\infty} \mathfrak{E}_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

sind nach Satz 3 alle Koeffizienten $\mathfrak{E}_{h_1 \ldots h_n}(t)$ mit

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n < 2^{-3-\frac{11}{n}} p^{1+\frac{1}{n}}$$

---

[6]) Siehe loc. cit. [1]), S. 359.

äquivalent Null. Die sämtlichen Koeffizienten $\mathfrak{C}_{h_1 \ldots h_n}(t)$ sind Polynome in den Zahlen $t_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ und in jeder davon höchstens vom Grad $2p$. Es ist

$$\mathfrak{t}^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} = (a_1^{\alpha_1} \ldots a_m^{\alpha_m})^k \sum_{\beta} \binom{\beta_1}{\alpha_1} \ldots \binom{\beta_m}{\alpha_m} \times$$
$$\times (f_1(\mathfrak{z}) - a_1^k f_1(\Omega^k \mathfrak{z}))^{\beta_1 - \alpha_1} \ldots (f_m(\mathfrak{z}) - a_m^k f_m(\Omega^k \mathfrak{z}))^{\beta_m - \alpha_m} \mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}.$$

Die Zahlen $f_\mu(\mathfrak{z})$ sind alle endlich; denn für genügend großes k existiert die endliche Zahl $f_\mu(\Omega^k \mathfrak{z})$ und in der Gleichung

$$f_\mu(\mathfrak{z}) = a_\mu^k f_\mu(\Omega^k \mathfrak{z}) + b_\mu^{(k)}(\mathfrak{z})$$

ist $b_\mu^{(k)}(\mathfrak{z})$ gleichfalls endlich, da $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{U}$ liegt. Mit wachsendem k strebt der Funktionswert $f_\mu(\Omega^k \mathfrak{z})$ gegen eine endliche Zahl. Daher gibt es eine positive Konstante c_9, die von p und k nicht abhängt, so daß von einem k ab

$$|\mathfrak{t}^{(k)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}| \leqq e^{c_9 k}$$

ist.

Sei

$$\mathsf{H} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{c_{\alpha 1}}{c_{11}} h_\alpha$$

gesetzt und H_0 der kleinste Wert von H, für den ein Polynom $\mathfrak{C}_{h_1 \ldots h_n}(t)$ nichtäquivalent Null ist. Offenbar ist

$$\mathsf{H}_0 \geqq c_{10}\, p^{1 + \frac{1}{n}},$$

und zwar hängt die positive Zahl c_{10} nicht von p und k ab. Alle Polynome $\mathfrak{C}_{h_1 \ldots h_n}(t)$ mit $\mathsf{H} < \mathsf{H}_0$ befriedigen für genügend großes k die Gleichung

$$\mathfrak{C}_{h_1 \ldots h_n}(\mathfrak{t}^{(k)}) = 0.$$

39. Da die Potenzreihe

$$\mathfrak{C}(z \mid t) = \sum_{h_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{h_n=0}^{\infty} \mathfrak{C}_{h_1 \ldots h_n}(t)\, z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$$

in genügender Nähe des Nullpunktes konvergiert, so gibt es $n+1$ positive Zahlen

$$R_0, R_1, \ldots, R_n,$$

die von p, aber nicht von k abhängen, so daß die Koeffizienten des Polynoms $\mathfrak{C}_{h_1 \ldots h_n}(t)$ alle absolut kleiner als

$$R_0 R_1^{h_1} \ldots R_n^{h_n}$$

sind und folglich

$$|\mathfrak{C}_{h_1 \ldots h_n}(t^{(k)})| \leqq R_0 R_1^{h_1} \ldots R_n^{h_n} e^{c_{11} p k}$$

ist, mit einer von p und k unabhängigen positiven Zahl c_{11}. Wenn k genügend groß ist, so ist ferner

$$\mathfrak{z}_1^{(k) h_1} \ldots \mathfrak{z}_n^{(k) h_n} | \leqq e^{\frac{1}{2} \mathsf{H} \Lambda_0 \varrho_1^k} \qquad (\mathfrak{z}^{(k)} = \Omega^k \mathfrak{z});$$

Λ_0 bedeutet die negative Zahl

$$\Lambda_0 = \Re\left(\sum_{\beta=1}^{n} c_{1\beta} \log \mathfrak{z}_\beta\right) < 0 .$$

Aus den letzten Formeln folgt die weitere Ungleichung

$$|\mathfrak{E}(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)})| \leqq R_0\, e^{c_{11} p k} \sum_{\mathrm{H} \geqq \mathrm{H}_0}' \left(R_1\, e^{\frac{1}{2}\frac{c_{11}}{c_{11}}\Lambda_0 \varrho_1^k}\right)^{h_1} \cdots \left(R_n\, e^{\frac{1}{2}\frac{c_{n1}}{c_{11}}\Lambda_0 \varrho_1^k}\right)^{h_n}.$$

Die Summe $\sum\limits_{\mathrm{H} \geqq \mathrm{H}_0}'$ ist bis auf endlich viele fehlenden Glieder das Produkt von n geometrischen Reihen; für großes k spielen die Glieder mit möglichst kleinem H-Wert die Hauptrolle. Durch Verschlechtern der Abschätzung folgt, daß von einem k ab

$$|\mathfrak{E}(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)})| \leqq e^{c_{11} p k + \frac{\mathrm{H}_0}{4}\Lambda_0 \varrho_1^k}$$

ist, und hieraus folgt die

2. Ungleichung: Ist p eine genügend große natürliche Zahl, und liegt die natürliche Zahl k oberhalb einer von p abhängigen Schranke, so ist

$$|\mathfrak{E}(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)}| \leqq e^{-c_{12} p^{1+\frac{1}{n}} \varrho_1^k}$$

mit einer positiven Zahl c_{12}, die von p und k nicht abhängt.

40. Es kann jetzt der Hauptsatz dieser Arbeit bewiesen werden.

Die Funktion $f_\mu(z)$ unterscheidet sich von der konvergenten Reihe

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_\mu^h\, b_\mu(\Omega^h z)$$

höchstens um eine additive Konstante; dieselbe ist eine algebraische Zahl, da die zugehörige Potenzreihe algebraische Koeffizienten hat. Folglich sind die Koeffizienten der zugehörigen Potenzreihe sogar in einem *endlichen* algebraischen Zahlkörper gelegen, und es gibt hierzu als Oberkörper einen endlichen algebraischen Zahlkörper, in dem außerdem die Zahlen a_μ, die Zahlen $\mathfrak{z}_\mu$ und die Koeffizienten $\mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m}$ in der zu widerlegenden Gleichung

$$F(\mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}) \equiv \sum_{\alpha} \mathfrak{t}_{\alpha_1 \ldots \alpha_m} f_1(\mathfrak{z})^{\alpha_1} \cdots f_m(\mathfrak{z})^{\alpha_m} = 0$$

liegen. Wegen

$$F(\mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}) = F(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)})$$

ist also

$$\mathfrak{E}(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)}) = \mathfrak{A}_0(\Omega^k \mathfrak{z} \,|\, \mathfrak{t}^{(k)})$$

und nach der ersten und zweiten Ungleichung:

$$e^{-c_{12} p^{1+\frac{1}{n}} \varrho_1^k} \geqq e^{-c_8 p \varrho_1^k},$$

wenn p genügend groß ist und k eine von p abhängige Folge durchläuft. Das ist aber gewiß bereits für $p > \left(\frac{c_8}{c_{12}}\right)^n$ ausgeschlossen, so daß die Behauptung des Hauptsatzes dieser Arbeit damit bewiesen ist.

VI.

41. Der Hauptsatz dieser Arbeit läßt sich unmittelbar auf die Funktionen anwenden, die im Kapitel 2 untersucht wurden. Ein Fall sei hiervon besonders genannt.

Nach früher ist die Funktion

$$f(z) = f(z_1 z_2) = \sum_{h_1=1}^{\infty} \sum_{h_2=1}^{[\omega h_1]} z_1^{h_1} z_2^{h_2},$$

wo ω eine positive reellquadratische Irrationalzahl bedeutet, transzendental-transzendent. Sie genügt der Funktionalgleichung

$$f(z) = f(\Omega z) + b(z).$$

Eine genauere Untersuchung zeigt, daß der Nenner der rationalen Funktion $b(z)$ und also auch der der abgeleiteten Funktionen $b_{l_1 l_2}(z)$ allein die Faktoren

$$z_1^{p_\mu} z_2^{q_\mu} - 1 \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, \nu + 1)$$

besitzt, so daß die Punktmenge $\mathfrak{u}$ durch die Ungleichungen

$$\mathfrak{z}_1 \neq 0, \quad \mathfrak{z}_2 \neq 0, \quad \Re(\log \mathfrak{z}_1 + \omega \log \mathfrak{z}_2) < 0, \quad \mathfrak{z}_1^{p_\mu} \mathfrak{z}_2^{q_\mu} \neq 1 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots)$$

bestimmt ist; dabei bedeuten p_μ und q_ν die sämtlichen Näherungsnenner und -zähler der Zahl ω [7]. Die Voraussetzungen des Hauptsatzes sind alle erfüllt; es ergibt sich daher:

„*Der Punkt* $\mathfrak{z}$ *besitze algebraische Koordinaten* $\mathfrak{z}_\alpha$ *und sei in* $\mathfrak{u}$ *gelegen. Dann sind beliebig endlich viele Zahlen aus der Menge*

$$\mathbf{D}_1^{l_1} \mathbf{D}_2^{l_2} f(z)\Big|_{\mathfrak{z}}, \qquad (l_1, l_2 = 0, 1, 2, \ldots)$$

oder auch der Menge

$$\left.\frac{\partial^{l_1+l_2} f(z)}{\partial z_1^{l_1} \partial z_2^{l_2}}\right|_{\mathfrak{z}} \qquad (l_1, l_2 = 0, 1, 2, \ldots)$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der algebraischen Zahlen.“

Es besteht also eine arithmetische Eigenschaft der Funktion $f(z)$, die vollkommen der funktionentheoretischen Transzendental-Transzendenz analog ist.

42. Die zuletzt bewiesene arithmetische Eigenschaft der Funktion $f(z)$ gestattet eine funktionentheoretische Folgerung.

---

[7]) Siehe loc. cit. [1]), S. 363.

Der Punkt $(\mathfrak{z}, 1)$ liegt in der Punktmenge $\mathfrak{U}$, sobald

$$0 < |\mathfrak{z}| < 1$$

ist. Wenn alsdann die Zahl $\mathfrak{z}$ algebraisch ist, so sind speziell beliebig endlich viele aus der Reihe der Zahlen

$$\left.\frac{\partial^l f(z)}{\partial z_1^l}\right|_{(\mathfrak{z},1)}, \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

algebraisch unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen. Sei zur Abkürzung

$$\varphi(z) = f(z, 1) = \sum_{h=1}^{\infty} [\omega h] z^h; \qquad \varphi^{(l)}(z) = \frac{d^l \varphi(z)}{dz^l}$$

gesetzt: dann gilt folgender

Satz: „*Die Funktion $\varphi(z)$ ist transzendental-transzendent.*“

Denn im entgegengesetzten Fall gäbe es ein Polynom

$$\mathfrak{F}(w_1, w_2, \ldots, w_m | z) \not\equiv 0,$$

so daß etwa

$$\mathfrak{F}(\varphi(z), \varphi'(z), \ldots, \varphi^{(m-1)}(z) | z) \equiv 0$$

ist. Dieses Polynom besitze genau $\mathfrak{n}$ Koeffizienten; dieselben sind nicht alle Null. Werden für die Funktionen $\varphi^{(l)}(\mathfrak{z})$ ihre Potenzreihen eingesetzt und alsdann die Taylorkoeffizienten der entstehenden Entwicklung gleich Null gemacht, so ergeben sich für die Koeffizienten von $\mathfrak{F}(w_1 \ldots w_m | z)$ unendlich viele homogene lineare Gleichungen mit algebraischen Zahlkoeffizienten. Von diesen Gleichungen sind höchstens $\mathfrak{n} - 1$ linear unabhängig. Also dürfen die Koeffizienten von $\mathfrak{F}(w_1 \ldots w_m | z)$ sogar als algebraische Zahlen angenommen werden. Da es gewiß eine algebraische Zahl $\mathfrak{z}$ mit

$$0 < |\mathfrak{z}| < 1$$

gibt, so daß $\mathfrak{F}(w_1 \ldots w_m | \mathfrak{z})$ nicht identisch verschwindet, so besteht alsdann die nichttriviale Zahlgleichung

$$\mathfrak{F}(\varphi(\mathfrak{z}) \ldots \varphi^{(m-1)}(\mathfrak{z}) | \mathfrak{z}) = 0.$$

Das widerspricht aber der algebraischen Unabhängigkeit der Zahlen $\varphi^{(l)}(\mathfrak{z})$.

43. Anstatt auf weitere Anwendungen des Hauptsatzes einzugehen, möge noch ein Zusatz zum ersten Kapitel gemacht werden.

Sei D eine quadratfreie natürliche Zahl und $K(\sqrt{D})$ ein reeller quadratischer Zahlkörper; er besitzt die Diskriminante

$$d = D \quad \text{für} \quad D \equiv 1 \pmod 4; \qquad d = 4D \quad \text{für} \quad D \equiv 2 \quad \text{oder} \quad 3 \pmod 4)$$

und die Basis

$$\omega_1 = 1, \qquad \omega_2 = \frac{d + \sqrt{d}}{2}.$$

Durch

$$F(t, t') = \sum_{\alpha \succ 1} e^{\alpha t + \alpha' t'}$$

wird die *Hecke*sche Geometrische Reihe des Körpers definiert; sie konvergiert für

$$\Re(t) < 0, \quad \Re(t') < 0.$$

Bedeutet η eine beliebige totalpositive Einheit des Körpers, so ist

$$F(\eta t, \eta' t') = F(t, t').$$

Um auf gewöhnliche Potenzreihen zu kommen, werde die Funktion

$$f(z_1 z_2) = \sum_{\alpha \succ 0} z_1^{S(\alpha)} z_2^{S\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{d}}\right)}$$

eingeführt, dabei ist $S(\alpha)$ die Spur von α und das Ideal

$$\mathfrak{m} = \left(1, \frac{1}{2\sqrt{d}}\right) = \frac{1}{\mathfrak{d}}$$

ist die reziproke Differente von $K(\sqrt{D})$. Es bestehen folgende Gleichungen:

$$f(z_1 z_2) = F(t t'),$$

$$t = \log z_1 + \frac{1}{2\sqrt{d}} \log z_2, \quad t' = \log z_1 - \frac{1}{2\sqrt{d}} \log z_2;$$

aus ihnen geht hervor, daß die Funktion $f(z_1 z_2)$ im Raumteil

$$\Re\left(\log z_1 + \frac{1}{2\sqrt{d}} \log z_2\right) < 0, \quad \Re\left(\log z_1 - \frac{1}{2\sqrt{d}} \log z_2\right) < 0$$

existiert.

Nach bekannten Sätzen über die Pellsche Gleichung gibt es zwei natürliche Zahlen e_1 und e_2, die der Beziehung

$$e_1^2 - 4 d e_2^2 = 1$$

genügen, denn die Zahl $4d$ ist gewiß kein vollständiges Quadrat. Die Zahl

$$\eta = e_1 + 2 e_2 \sqrt{d}$$

stellt eine totalpositive Einheit von $K(\sqrt{D})$ dar, so daß

$$F(\eta t, \eta' t') = F(t t')$$

ist; eine einfache Umrechnung führt zu der analogen Gleichung

$$f\left(z_1^{S\left(\frac{\eta}{2}\right)} z_2^{S\left(\frac{\eta}{4\sqrt{d}}\right)}, \; z_1^{S(\eta\sqrt{d})} z_2^{S\left(\frac{\eta}{2}\right)}\right) = f(z_1 z_2)$$

für die Funktion $f(z_1 z_2)$. Die Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} S\left(\frac{\eta}{2}\right), & S\left(\frac{\eta}{4\sqrt{d}}\right) \\ S(\eta\sqrt{d}), & S\left(\frac{\eta}{2}\right) \end{pmatrix}$$

besitzt offenbar lauter positive ganze rationale Elemente; die zugehörige charakteristische Gleichung besitzt die beiden Wurzeln

$$\varrho_1 = \eta = e_1 + 2\, e_2 \sqrt{d}\,, \qquad \varrho_2 = \eta' = e_1 - 2\, e_2 \sqrt{d}\,; \qquad\qquad \varrho_1 > 1, \quad \varrho_1 > |\varrho_2|,$$

und ist daher im Körper der rationalen Zahlen irreduzibel.

44. Die Funktion $f(z_1 z_2)$ genügt demnach einer Funktionalgleichung genau von der im ersten Kapitel betrachteten Art; dasselbe gilt von den abgeleiteten Funktionen

$$f_{l_1 l_2}(z_1 z_2) = \mathbf{D}_1^{l_1} \mathbf{D}_2^{l_2} f(z_1 z_2) \qquad\qquad (l_1, l_2 = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo $\mathbf{D}_1$ und $\mathbf{D}_2$ die Operatoren von früher bedeuten. Im Gegensatz zum ersten Kapitel sind jedoch die Exponenten in der Reihe

$$f(z_1 z_2) = \sum_{\alpha > 0} z_1^{S(\alpha)} z_2^{S\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{d}}\right)}$$

zwar noch ganz rational, aber nicht mehr alle nichtnegativ; es handelt sich um eine Laurentsche Reihe. Trotzdem läßt sich das ganze Beweisverfahren des Satzes 1 unverändert auch auf diesen Fall ausdehnen und man gelangt zu folgendem Ergebnis:

Zwischen den m Funktionen

$$f_{l_1^{(1)} l_2^{(1)}}(z_1 z_2), \quad f_{l_1^{(2)} l_2^{(2)}}(z_1 z_2), \ldots, f_{l_1^{(m)} l_2^{(m)}}(z_1 z_2)$$

besteht dann und nur dann eine algebraische Gleichung

$$F\left(f_{l_1^{(1)} l_2^{(1)}}(z_1 z_2), \ldots, f_{l_1^{(m)} l_2^{(m)}}(z_1 z_2) \,\middle|\, z_1, z_2\right) \equiv 0,$$

wo das Polynom

$$F(w_1 w_2 \ldots w_m \,|\, z_1 z_2)$$

nicht identisch verschwindet, wenn mindestens zwei der Differenzen

$$l_1^{(1)} - l_2^{(1)}, \; l_1^{(2)} - l_2^{(2)}, \ldots, l_1^{(m)} - l_2^{(m)}$$

übereinstimmen; wenn

$$l_1^{(1)} - l_2^{(1)} = l_1^{(2)} - l_2^{(2)}$$

ist, so besteht die Differentialgleichung

$$\mathbf{D}_1^{l_1^{(1)}} \mathbf{D}_2^{l_2^{(2)}} f(z_1 z_2) \equiv \text{konst.}\, \mathbf{D}_1^{l_1^{(2)}} \mathbf{D}_2^{l_2^{(2)}} f(z_1 z_3).$$

Krefeld, 2. August 1929.

(Eingegangen am 4. Dezember 1929.)