MATHEMATISCHE ANNALEN

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN

FORTGEFÜHRT DURCH

FELIX KLEIN

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

DAVID HILBERT

IN GÖTTINGEN

UNTER MITWIRKUNG VON

OTTO BLUMENTHAL IN AACHEN

ERICH HECKE IN HAMBURG

Sonderabdruck aus Band 105, Heft 2.

Kurt Mahler

Ein Beweis des Thue-Siegelschen Satzes über die Approximation algebraischer Zahlen für binomische Gleichungen.

BERLIN

VERLAG VON JULIUS SPRINGER

1931

Ein Beweis des Thue-Siegelschen Satzes über die Approximation algebraischer Zahlen für binomische Gleichungen.

Von

Kurt Mahler in Göttingen.

Im Jahre 1908 zeigte Thue (1), daß algebraische Zahlen der speziellen Form $\xi = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ für jedes positive ε sich nur durch endlichviele rationale Zahlen $\frac{p}{q}$ so scharf annähern lassen, daß

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leqq q^{-\left(\frac{n}{2}+1+\varepsilon\right)}$$

ist. Der Beweis benutzte, wenn auch in etwas versteckter Art, die bekannte Kettenbruchentwicklung der Binomialreihe $(1-z)^{\omega}$. In weiteren Arbeiten über die Approximation algebraischer Zahlen (2, 3) hat dann bekanntlich Thue statt dessen die ganz anders geartete Schubfachmethode von Dirichlet angewandt und gezeigt, daß der vorige Satz für beliebige algebraische Zahlen bestehen bleibt. Sein Verfahren hat später Siegel verallgemeinert (4, 5, 6, 7) und unter anderm gezeigt, daß für jede algebraische Zahl in der obigen Ungleichung der Exponent $\frac{n}{2}+1+\varepsilon$ ersetzt werden darf durch $\frac{n}{m}+m-1+\varepsilon$, wenn m irgendeine natürliche Zahl bedeutet.

Diese Note stellt eine Verallgemeinerung des Thueschen Ansatzes in der Arbeit (1) dar; gleich ihm beschränke ich mich auf die Wurzeln $\xi = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ der binomischen Gleichungen. Es wird die Kettenbruchentwicklung der Binomialreihe verallgemeinert, und statt rationaler Näherungsfunktionen werden algebraische Näherungsfunktionen angegeben. Dabei verfahre ich genau wie in meiner Arbeit (8) bei der Exponentialfunktion. Für die Näherungsfunktionen werden Integrale aufgestellt; dadurch werden die Abschätzungen sehr erleichtert, und man kann ohne Schwierigkeit den Thueschen Satz mit dem Siegelschen Exponenten für die binomischen algebraischen Gleichungen beweisen, ohne von der Schubfachmethode Gebrauch zu machen.

I.

1. Seien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ m natürliche, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ m komplexe Zahlen, für die keine der Differenzen

$$\omega_h - \omega_k \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m;\ h \neq k)$$

ganz rational ist. Nach bekannten Sätzen über homogene lineare Gleichungen gibt es m Polynome

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

die nicht gleichzeitig identisch verschwinden und bzw. höchstens vom Grad

$$\varrho_1 - 1, \varrho_2 - 1, \ldots, \varrho_m - 1$$

sind, so daß in der Potenzreihe des Ausdruckes

$$\sum_{k=1}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right)(1-z)^{\omega_k} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l$$

alle Koeffizienten a_l mit

$$0 \leqq l < \varrho_1 + \varrho_2 + \ldots + \varrho_m - 1$$

gleich Null sind. Irgendeiner dieser Ausdrücke werde mit

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right)(1-z)^{\omega_k}$$

bezeichnet. Dann kann leicht gezeigt werden, daß

$$\frac{d^{\varrho_1}}{dz^{\varrho_1}}\left\{(1-z)^{-\omega_1} R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right)\right\}$$

gleich einem Ausdruck

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_2 - \omega_1 - \varrho_1 & \ldots & \omega_m - \omega_1 - \varrho_1 \\ \varrho_2 & \ldots & \varrho_m \end{matrix}\right)$$

ist, und daß infolgedessen der Koeffizient der $(\varrho_1 + \ldots + \varrho_m - 1)$-ten Potenz von z in der Potenzreihe von $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right)$ nicht gleich Null ist. Wird dieser Koeffizient so gewählt:

$$\frac{\Gamma(\varrho_1) \ldots \Gamma(\varrho_m)}{\Gamma(\sigma)} \qquad \left(\sigma = \sum_{k=1}^{m} \varrho_k\right),$$

so wird alsdann $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right)$ *eindeutig* bestimmt. Unter $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix}\right)$ ist im folgenden stets diese Funktion verstanden [1]).

---

[1]) Siehe den Beweis in meiner Arbeit (8). Dort sind die analogen Betrachtungen für die Exponentialfunktion vollständig durchgeführt.

Infolge der letzten Festsetzung ist identisch

$$\left\{\frac{d^{\varrho_{m-1}}}{dz^{\varrho_{m-1}}}(1-z)^{\omega_{m-2}+\varrho_{m-2}-\omega_{m-1}}\right\}\left\{\frac{d^{\varrho_{m-2}}}{dz^{\varrho_{m-2}}}(1-z)^{\omega_{m-3}+\varrho_{m-3}-\omega_{m-2}}\right\}\cdots\times$$
$$\times\left\{\frac{d^{\varrho_1}}{dz^{\varrho_1}}(1-z)^{-\omega_1}\right\}\frac{R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m\\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right.\right)}{\Gamma(\varrho_1)\ldots\Gamma(\varrho_m)}=\frac{R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_m-\omega_{m-1}-\varrho_{m-1}\\ \varrho_m\end{matrix}\right.\right)}{\Gamma(\varrho_m)}$$

und da

$$\frac{R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_m-\omega_{m-1}-\varrho_{m-1}\\ \varrho_m\end{matrix}\right.\right)}{\Gamma(\varrho_m)}=\frac{z^{\varrho_m-1}(1-z)^{\omega_m-\omega_{m-1}-\varrho_{m-1}}}{\Gamma(\varrho_m)}$$

ist, wird umgekehrt

$$\frac{R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m\\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right.\right)}{\Gamma(\varrho_1)\ldots\Gamma(\varrho_m)}=\left\{(1-z)^{\omega_1}J^{\varrho_1}\right\}\left\{(1-z)^{\omega_2-\omega_1-\varrho_1}J^{\varrho_2}\right\}\cdots\times$$
$$\times\left\{(1-z)^{\omega_{m-1}-\omega_{m-2}-\varrho_{m-2}}J^{\varrho_{m-1}}\right\}\frac{z^{\varrho_m-1}(1-z)^{\omega_m-\omega_{m-1}-\varrho_{m-1}}}{\Gamma(\varrho_m)},$$

wobei J die Operation

$$J=\int_0\ldots dz$$

bedeutet. Dies vielfache Integral kann leicht auf folgende Form gebracht werden:

$$R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m\\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right.\right)=\int_0^z dt_1\int_0^{t_1}dt_2\ldots\int_0^{t_{m-2}}dt_{m-1}\,\boldsymbol{R}(z\,|\,t_1\,t_2\ldots t_{m-1}),$$

$$\boldsymbol{R}(z\,|\,t_1\,t_2\ldots t_{m-1})=(z-t_1)^{\varrho_1-1}(t_1-t_2)^{\varrho_2-1}\ldots(t_{m-2}-t_{m-1})^{\varrho_{m-1}-1}\,t_{m-1}^{\varrho_m-1}\times$$
$$\times(1-z)^{\omega_1}(1-t_1)^{\omega_2-\omega_1-\varrho_1}\ldots(1-t_{m-2})^{\omega_{m-1}-\omega_{m-2}-\varrho_{m-2}}(1-t_{m-1})^{\omega_m-\omega_{m-1}-\varrho_{m-1}}.$$

Für $R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 & \ldots & \omega_m\\ \varrho_1 & \ldots & \varrho_m\end{matrix}\right.\right)$ läßt sich auch ein einfaches Cauchysches Integral angeben. Es ist

$$R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right)=\frac{(-1)^{\sigma-1}\Gamma(\varrho_1)\ldots\Gamma(\varrho_m)}{2\pi i}\int_C\frac{(1-z)^{\mathfrak{z}}\,d\mathfrak{z}}{\prod\limits_{k=1}^{m}\prod\limits_{h=0}^{\varrho_k-1}(\mathfrak{z}-\omega_k-h)},$$

wobei über einen genügend großen Kreis um den Nullpunkt in positiver Richtung integriert wird. Denn es gibt eine Entwicklung nach fallenden Potenzen

$$\prod_{k=1}^{m}\prod_{h=0}^{\varrho_k-1}\left(1-\frac{\omega_k+h}{\mathfrak{z}}\right)^{-1}=\sum_{l=0}^{\infty}b_l\,\mathfrak{z}^{-l}\qquad (b_0=1),$$

und daher wird nach dem Residuensatz

$$R\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m\\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right.\right)=(-1)^{\sigma-1}\Gamma(\varrho_1)\ldots\Gamma(\varrho_m)\sum_{l=0}^{\infty}b_l\frac{(\log(1-z))^{\sigma+l-1}}{\Gamma(\sigma+l)}$$
$$=\frac{\Gamma(\varrho_1)\ldots\Gamma(\varrho_m)}{\Gamma(\sigma)}z^{\sigma-1}+\ldots.$$

Summiert man andererseits über die Residuen der Pole des Integranden, so wird

$$R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)(1-z)^{\omega_k};$$

$$A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right) = (-1)^{\sigma-1}\Gamma(\varrho_1)\ldots\Gamma(\varrho_m)\sum_{h=0}^{\varrho_k-1}\frac{(1-z)^h}{\Phi'(\omega_k+h)};$$

$$\Phi(\mathfrak{z}) = \prod_{k=1}^{m}\prod_{h=0}^{\varrho_k-1}(\mathfrak{z}-\omega_k-h),$$

wobei das Polynom $A_k\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ genau den Grad $\varrho_k - 1$ besitzt. Es sind also die Forderungen der Definition von $R\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m\end{matrix}\right)$ erfüllt.

2. Setzt man zur Abkürzung

$$F\left(\mathfrak{z} \,\middle|\, \begin{matrix}\omega \\ \varrho\end{matrix}\right) = \prod_{h=0}^{\varrho-1}(\mathfrak{z}-\omega-h) = \frac{\Gamma(\mathfrak{z}-\omega+1)}{\Gamma(\mathfrak{z}-\omega-\varrho+1)},$$

so ist

$$\Phi(\mathfrak{z}) = \prod_{k=1}^{m} F\left(\mathfrak{z} \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_k \\ \varrho_k\end{matrix}\right); \quad \Phi'(\omega_k+h) = F'\left(\omega_k+h \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_k \\ \varrho_k\end{matrix}\right)\prod_{\substack{\varkappa=1 \\ \varkappa \neq k}}^{m} F\left(\omega_k+h \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_\varkappa \\ \varrho_\varkappa\end{matrix}\right)$$

$$\text{für } k = 1, 2, \ldots, m;\ h = 0, 1, \ldots, \varrho_k - 1.$$

Ferner ist

$$\frac{\Gamma(\varrho_k)}{F'\left(\omega_k+h \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_k \\ \varrho_k\end{matrix}\right)} = (-1)^{\varrho_k-h-1}\binom{\varrho_k-1}{h},$$

während aus der bekannten Gammaformel

$$\int_G t^x(1+t)^{y-1}\,dt = \frac{2}{i}\sin\pi x\,\frac{\Gamma(1+x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(1+x+y)} \quad \text{für} \quad \Re(y) > 0,$$

wo G den Einheitskreis in positiver Richtung und der Integrand den Hauptwert bedeutet, folgt, daß

$$\frac{\Gamma(\varrho_\varkappa)}{F\left(\omega_k+h \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_\varkappa \\ \varrho_\varkappa\end{matrix}\right)} = \frac{(-1)^{\varrho_\varkappa-h}\,i}{2\sin(\omega_k-\omega_\varkappa)\pi}\int_G t^{\omega_k-\omega_\varkappa+h-\varrho_\varkappa}(1+t)^{\varrho_\varkappa-1}\,dt$$

$$\text{für } h = 0, 1, \ldots, \varrho_k - 1,\ \varkappa \neq k$$

ist. Bedeuten also $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_{k+1} \ldots t_m$ $m-1$ Veränderliche, die der Reihe nach die Einheitskreise $G_1, G_2, \ldots, G_{k-1}, G_{k+1} \ldots G_m$ ihrer Ebenen in positivem Sinne durchlaufen, Q_k die endliche und von Null verschiedene Konstante

$$Q_k = \prod_{\substack{\varkappa=1 \\ \varkappa \neq k}}^{m}\frac{1}{2\,i\sin(\omega_k-\omega_\varkappa)\pi}$$

und wird zur Abkürzung

$$\int_{G_1} dt_1 \ldots \int_{G_{k-1}} dt_{k-1} \int_{G_{k+1}} dt_{k+1} \ldots \int_{G_m} dt_m = \int_{(G)} dt$$

geschrieben, so folgt mittels einer einfachen Rechnung die Integralformel

$$A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = Q_k\,(-1)^{m-1} \int_{(G)} \left(1 + (-1)^m t_1 \ldots t_{k-1}\, t_{k+1} \ldots t_m\,(1-z)\right)^{\varrho_k - 1} \times$$

$$\times \prod_{\substack{\varkappa=1 \\ \varkappa \neq k}}^{m} t_\varkappa^{\omega_k - \omega_\varkappa - \varrho_\varkappa} (1 + t_\varkappa)^{\varrho_\varkappa - 1}\, dt.$$

3. Bedeutet δ_{hk} das Symbol

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{für } h = k \\ 0 & \text{für } h \neq k \end{cases} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots m)$$

und wird gesetzt

$$R_h\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = R\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 + \delta_{h1} & \ldots & \varrho_m + \delta_{hm} \end{matrix} \right.\right),$$

$$A_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = A_k\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 & \ldots & \omega_m \\ \varrho_1 + \delta_{h1} & \ldots & \varrho_m + \delta_{hm} \end{matrix} \right.\right),$$

$$(h, k = 1, 2, \ldots, m),$$

so besteht zwischen der Determinante

$$\Delta\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = \left| A_{h,k}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) \right|$$

und den Unterdeterminanten

$$\Delta_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = \left| A_{h'k'}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) \right|_{\substack{h' \neq h \\ k' \neq k}}$$

die Identität

$$\Delta\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) (1-z)^{\omega_k} = \sum_{h=1}^{m} (-1)^{h+k} \Delta_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) R_h\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m).$$

Also besitzt $\Delta\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right)$ im Nullpunkt eine Nullstelle der Ordnung σ; da es andererseits offenbar ein Polynom vom gleichen Grad σ ist, muß

$$\Delta\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right) = \delta\begin{pmatrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{pmatrix} z^\sigma$$

sein, wo die Konstante $\delta\begin{pmatrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{pmatrix}$ von z nicht abhängt; da ferner $A_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \omega_1 \ldots \omega_m \\ \varrho_1 \ldots \varrho_m \end{matrix} \right.\right)$ ein Polynom von z genau vom Grade $\varrho_k + \delta_{hk} - 1$ ist, so wird $\delta\begin{pmatrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{pmatrix}$ von Null verschieden; *die Determinante*

$$\Delta\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}\omega_1 \dots \omega_m \\ \varrho_1 \dots \varrho_m\end{matrix}\right)$$

verschwindet also dann und nur dann, wenn $z = 0$ *ist*[2]).

II.

4. Sei $n \geqq 3$ eine natürliche Zahl, $n \geqq m \geqq 2$ und

$$R_h(z) = R_h\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}0 & \frac{1}{n} & \dots & \frac{m-1}{n} \\ \varrho & \varrho & \dots & \varrho\end{matrix}\right), \qquad A_{hk}(z) = A_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix}0 & \frac{1}{n} & \dots & \frac{m-1}{n} \\ \varrho & \varrho & \dots & \varrho\end{matrix}\right)$$

$$\text{für } h, k = 1, 2, \dots, m,$$

so daß

$$R_h(z) = \sum_{k=1}^{m} A_{hk}(z)(1-z)^{\frac{k-1}{n}} \qquad (h = 1, 2, \dots, m)$$

ist und $R_h(z)$ im Nullpunkte $z = 0$ eine $m\varrho$-fache Nullstelle hat. Mit der neuen Veränderlichen

$$x = x(z) = (1-z)^{\frac{1}{n}}, \qquad x(0) = 1$$

gehen die vorigen Funktionen über in

$$\mathfrak{R}_h(x) = R_h(1 - x^n), \qquad \mathfrak{A}_{hk}(x^n) = A_{hk}(1 - x^n).$$

Die Umgebung von $z = 0$ wird abgebildet auf die Umgebung von $x = 1$; $\mathfrak{R}_h(x)$ hat daher in $x = 1$ eine Nullstelle der Ordnung $m\varrho$. Setzt man also

$$\mathfrak{S}_h(x) = (x-1)^{-m\varrho}\,\mathfrak{R}_h(x),$$

so ist $\mathfrak{S}_h(x)$ bei $x = 1$ regulär; es ist sogar leicht einzusehen, daß es ein Polynom ist.

Führt man noch eine weitere unabhängige Veränderliche y ein und setzt

$$\mathfrak{T}_h(x\,y) = \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{A}_{hk}(x^n)\,\frac{y^{k-1} - x^{k-1}}{y - x},$$

$$\mathfrak{U}_h(x\,y) = \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{A}_{hk}(x^n)\,y^{k-1},$$

---

[2]) Führt man die Berechnung wirklich durch, so erhält man den Wert:

$$\delta\begin{pmatrix}\omega_1 & \dots & \omega_m \\ \varrho_1 & \dots & \varrho_m\end{pmatrix} = \mp \prod_{\substack{h,k=1 \\ h \neq k}}^{m} \frac{\Gamma(\omega_h - \omega_k)\,\Gamma(\varrho_k)}{\Gamma(\varrho_k + \omega_h - \omega_k)} \neq 0.$$

Vgl. meine Arbeit (8).

so besteht alsdann die Identität

$$\mathfrak{U}_h(x\,y) = (x-1)^{m\varrho}\,\mathfrak{S}_h(x) + (y-x)\,\mathfrak{T}_h(x\,y) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Determinante

$$|\mathfrak{A}_{h\,k}(x^n)|$$

ist nach 3. von Null verschieden, wenn x keine n-te Einheitswurzel ist. Also muß unter dieser Voraussetzung für jeden Wert von y mindestens eine der m Zahlen

$$\mathfrak{U}_h(x, y) \qquad (h = 1, 2, \ldots m)$$

von Null verschieden sein.

5. Seien a, b zwei natürliche Zahlen, so daß

$$\xi = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

eine algebraische Zahl genau n-ten Grades ist. Zwei beliebigen rationalen Zahlen mit positivem Nenner $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$, die der Ungleichung

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}\xi \leqq \frac{p_1}{q_1} \leqq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\xi, \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}}\xi \leqq \frac{p_2}{q_2} \leqq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\xi$$

genügen, mögen die Werte von x und y

$$x = \frac{q_1\,\xi}{p_1}, \qquad y = \frac{q_1\,p_2}{p_1\,q_2}$$

zugeordnet werden. Da x keine n-te Einheitswurzel ist, so bleibt mindestens eine der m Zahlen $\mathfrak{U}_h(x, y)$ von Null verschieden; es sei etwa

$$\mathfrak{U}_{h_0}(x, y) \neq 0.$$

Offenbar ist $\mathfrak{U}_{h_0}(x\,y)$ eine rationale Zahl; ihr Nenner läßt sich auf die folgende Weise nach oben abschätzen.

Man hat nach früher

$$\varrho(\varrho-1)^{m-1}A_{h\,k}(z) = (-1)^{m\varrho}\sum_{l=0}^{\varrho+\delta_{h\,k}-1}\frac{(\varrho+1)!\,\varrho!^{\,m-1}}{\Phi_h'\left(\frac{k-1}{n}+l\right)}\,(1-z)^{l}$$

mit

$$\frac{(\varrho+1)!\,\varrho!^{\,m-1}}{\Phi_h'\left(\frac{k-1}{n}+l\right)} = \frac{(\varrho+\delta_{h\,k})!}{F'\left(\frac{k-1}{n}+l\;\middle|\;\begin{matrix}\frac{k-1}{n}\\ \varrho+\delta_{h\,k}\end{matrix}\right)}\prod_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa\neq k}}^{m}\frac{(\varrho+\delta_{h\,\varkappa})!}{F'\left(\frac{k-1}{n}+l\;\middle|\;\begin{matrix}\frac{\varkappa-1}{n}\\ \varrho+\delta_{h\,\varkappa}\end{matrix}\right)},$$

wobei

$$\frac{(\varrho+\delta_{h\,k})!}{F'\left(\frac{k-1}{n}+l\;\middle|\;\begin{matrix}\frac{k-1}{n}\\ \varrho+\delta_{h\,k}\end{matrix}\right)}$$

eine ganze rationale Zahl, dagegen für $\varkappa \neq k$

$$\frac{(\varrho+\delta_{h\varkappa})!}{F\left(\frac{k-1}{n}+l \,\middle|\, \begin{matrix}\frac{\varkappa-1}{n}\\ \varrho+\delta_{h\varkappa}\end{matrix}\right)} = (-1)^{\varrho+\delta_{h\varkappa}} \frac{n \qquad (2n) \quad \ldots \quad ((\varrho+\delta_{h\varkappa})\,n)}{(n+K)\,(2n+K)\ldots((\varrho+\delta_{h\varkappa})\,n+K)}$$

$$\text{mit } K = -nl+\varkappa-k-n$$

ist. Nach einem Satz von Maier muß also der Hauptnenner der Koeffizienten der sämtlichen Polynome $A_{hk}(z)$ kleiner als die ϱ-te Potenz einer Konstanten bleiben, die nur von n und m abhängt[3]). Wegen

$$\mathfrak{U}_{h_0}(xy) = \sum_{k=1}^{m} A_{h_0 k}\left(1-\frac{a\,q_1^n}{b\,p_1^n}\right)\left(\frac{q_1 p_2}{p_1 q_2}\right)^{k-1}$$

ergibt sich der Nenner der rationalen Zahl $\mathfrak{U}_{h_0}(xy)$ hieraus durch Multiplikation mit $b^\varrho\, p_1^{n\varrho+m-1}\, q_2^{m-1}$, und da $\mathfrak{U}_{h_0}(xy)$ ungleich Null ist, besteht die Ungleichung

$$|\mathfrak{U}_{h_0}(xy)|^{-1} \leqq c_1^\varrho\, p_1^{n\varrho+m-1}\, q_2^{m-1}$$

mit einer positiven Konstanten c_1, die allein von n, m und b abhängt.

Nach 1. ist ferner

$$R_h(z) = \int_0^z dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{m-2}} dt_{m-1} \times$$

$$\times \frac{(z-t_1)^{\varrho+\delta_{h1}-1}(t_1-t_2)^{\varrho+\delta_{h2}-1}\ldots(t_{m-2}-t_{m-1})^{\varrho+\delta_{h\,m-1}-1}\,t_{m-1}^{\varrho+\delta_{hm}}}{(1-t_1)^{\varrho+\delta_{h1}-\frac{1}{n}}(1-t_2)^{\varrho+\delta_{h2}-\frac{1}{n}}\ldots(1-t_{m-1})^{\varrho+\delta_{h\,m-1}-\frac{1}{n}}}$$

und mit den neuen Integrationsveränderlichen $t_k = z\,u_k$ $(k=1,2,\ldots,m)$

$$R_h(z) = z^{m\varrho}\int_0^1 du_1 \int_0^{u_1} du_2 \ldots \int_0^{u_{m-2}} du_{m-1} \times$$

$$\times \frac{(1-u_1)^{\varrho+\delta_{h1}-1}(u_1-u_2)^{\varrho+\delta_{h2}-1}\ldots(u_{m-2}-u_{m-1})^{\varrho+\delta_{h\,m-1}-1}\,u_{m-1}^{\varrho+\delta_{hm}-1}}{(1-z u_1)^{\varrho+\delta_{h1}-\frac{1}{n}}(1-z u_2)^{\varrho+\delta_{h2}-\frac{1}{n}}\ldots(1-z u_{m-1})^{\varrho+\delta_{h\,m-1}-\frac{1}{n}}} = z^{m\varrho} J,$$

wobei wegen

$$z = 1-x^n \leqq \frac{1}{2}$$

die Faktoren des Nenners größer als $\frac{1}{2}$ sind. Da ferner

$$\mathfrak{S}_h(x) = \left(-\frac{1-x^n}{1-x}\right)^{m\varrho} J, \qquad \left|\frac{1-x^n}{1-x}\right| = |1+x+\ldots+x^{n-1}| \leqq \frac{3n}{2}$$

ist, so besteht die Ungleichung

$$|\mathfrak{S}_h(x)| \leqq c_2^\varrho,$$

wobei die positive Konstante c_2 allein von n, m abhängt.

---

[3]) Siehe die Arbeiten (9) von Maier und (7) von Siegel, wo auch Beweise ausgeführt sind.

Schließlich ergibt sich aus der Integralformel in 2.

$$(-1)^{m-1} A_{hk}(z) = \prod_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa \neq k}}^{m} \frac{1}{2\,i \sin \frac{k-\varkappa}{n}\pi} \times$$

$$\times \int\limits_{(G)} \Big(1 + (-1)^m (1-z) \prod_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa \neq k}}^{m} t_\varkappa\Big)^{\varrho+\delta_{hk}-1} \prod_{\substack{\varkappa=1\\ \varkappa \neq k}}^{m} t_\varkappa^{\frac{k-\varkappa}{n}-\varrho-\delta_{h\varkappa}} (1+t_\varkappa)^{\varrho+\delta_{h\varkappa}-1}\, dt$$

und der Definition von $\mathfrak{T}_h(xy)$, daß

$$|\mathfrak{T}_h(xy)| \leqq c_3^\varrho$$

ist, wobei auch c_3 eine positive Konstante ist, die allein von n und m abhängt.

Für die sämtlichen Glieder der Identität

$$\mathfrak{U}_{h_0}(xy) = \left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{m\varrho} \mathfrak{S}_{h_0}(x) \left(\xi - \frac{p_1}{q_1}\right)^{m\varrho} + \frac{q_1}{p_1} \mathfrak{T}_{h_0}(xy) \left(\frac{p_2}{q_2} - \xi\right)$$

sind damit Abschätzungen nach oben oder unten abgeleitet worden; aus ihnen folgt die Existenz zweier positiven Zahlen c_4 und c_5, die allein von n, m und ξ abhängen, so daß die Summe der beiden Zahlen

$$\vartheta_1 = c_4^\varrho\, q_1^{n\varrho+m-1}\, q_2^{m-1} \left|\xi - \frac{p_1}{q_1}\right|^{m\varrho}, \qquad \vartheta_2 = c_5^\varrho\, q_1^{n\varrho+m-1}\, q_2^{m-1} \left|\xi - \frac{p_2}{q_2}\right|$$

größer als zwei, mindestens eine von ihnen also größer als eins ist.

6. Es gelingt jetzt leicht, den Thue-Siegelschen Satz für die speziellen algebraischen Zahlen ξ zu beweisen[4]):

„Bedeutet ε eine beliebige positive Konstante, m eine beliebige natürliche Zahl, so besitzt die Ungleichung

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqq q^{-\left(\frac{n}{m}+m-1\right)-\varepsilon}$$

nur endlichviele Lösungen in rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$ mit positivem Nenner."

Es genügt, beim Beweis m auf die Zahlen $2, 3, \ldots, n$ zu beschränken. Nur solche Lösungen der vorigen Ungleichung brauchen betrachtet zu werden, die der weiteren Ungleichung

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \xi \leqq \frac{p}{q} \leqq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \xi$$

genügen; diese ist eine Folge der ersten, wenn der Nenner q genügend groß ist. Zu irgend zwei solchen rationalen Zahlen $\frac{p_1}{q_1}$ und $\frac{p_2}{q_2}$ werde die natürliche Zahl ϱ durch die Bedingung

$$q_1^{m(\varrho-1)} < q_2 \leqq q_1^{m\varrho}$$

---

[4]) Siehe hierzu die Arbeiten (1) bis (7).

bestimmt. Eine einfache Rechnung zeigt dann die Ungleichungen

$$\vartheta_1 \leqq q_1^{m-1} q_2^{-\frac{\varepsilon}{2}} \left(c_4 q_1^{-\frac{m\varepsilon}{2}}\right)^{\varrho}; \qquad \vartheta_2 \leqq q_1^{n+m+m\varepsilon-1} q_2^{-\frac{\varepsilon}{2}} \left(c_5 q_1^{-\frac{m\varepsilon}{2}}\right)^{\varrho}.$$

Gäbe es jetzt unendlichviele Lösungen der Ungleichung

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \leqq q^{-\left(\frac{n}{m}+m-1\right)-\varepsilon},$$

so könnte man insbesondere erreichen, daß

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \xi \leqq \frac{p_1}{q_1} \leqq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \xi, \qquad q_1 \geqq \max\left(c_4^{\frac{2}{m\varepsilon}}, c_5^{\frac{2}{m\varepsilon}}\right),$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{n}} \xi \leqq \frac{p_2}{q_2} \leqq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \xi, \qquad q_2 \geqq \max\left(q_1^{\frac{2}{\varepsilon}(m-1)}, q_1^{\frac{2}{\varepsilon}(n+m+m\varepsilon-1)}\right)$$

ist; dann wird aber $\vartheta_1 \leqq 1$ und $\vartheta_2 \leqq 1$ und ein Widerspruch erhalten.

Göttingen, den 4. Februar 1931.

Literaturverzeichnis.

(1) A. Thue: Bemerkungen über gewisse Näherungsbrüche algebraischer Zahlen, Videnskapsselskapets-Skrifter Christiania (1908).

(2) Om en general i store hele tal uløsbar ligning, Videnskapsselskapets-Skrifter Christiania (1908).

(3) Über Annäherungswerte algebraischer Zahlen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **135** (1909).

(4) C. Siegel: Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeitschr. **10** (1921).

(5) Näherungswerte algebraischer Zahlen, Math. Annalen **84** (1921).

(6) Über den Thueschen Satz, Videnskapsselskapets-Skrifter Christiania (1922).

(7) Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen, Abh. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1929.

(8) K. Mahler: Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, Journal für die reine und angewandte Mathematik. (Im Druck.)

(9) W. Maier: Potenzreihen irrationalen Grenzwertes, Journal für die reine und angewandte Mathematik **156** (1925).

Weitere Arbeiten von Thue über diophantische Approximationen sind im Literaturverzeichnis der Arbeit (4) angegeben.

(Eingegangen am 16. 2. 1931.)