

ist, zeige ich, welche Substitutionen man braucht, um eine gegebene Form in eine reduzierte Form überzuführen. Es sind dies die folgenden: Die ersten zwei Zeilen lauten:  $\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{matrix}$ ; in jeder folgenden Zeile steht ein  $+1$  und ein  $-1$ , ein Einser in der Hauptdiagonale, der zweite Einser unter einem der vorhergehenden Einser (mit gleichem Vorzeichen). Ich habe durch vollständige Induktion mit Hilfe von Übermatrizen bewiesen daß diese Substitutionen und alle die, die aus diesen durch Vertauschen der Zeilen und Spalten hervorgehen, hinreichend sind, und daß diese Substitutionen, von einigen abgesehen, die man leicht ausschalten kann, notwendig sind. Ich habe die Anzahl der notwendigen Reduktionssubstitutionen berechnet. Kennt man die Reduktionssubstitutionen, so kann man die Reduktionsbedingungen sofort finden, da ein äußerst einfacher Zusammenhang zwischen ihnen besteht. Vermindert eine notwendige Reduktionssubstitution  $-\sum_{1 \leq i < k \leq n+1} a_{ik}$  um  $c_{12}a_{12} + c_{13}a_{13} + \dots + c_{n, n+1}a_{n, n+1}$ , so lautet die zugehörige Reduktionsbedingung

$$c_{12}a_{12} + c_{13}a_{13} + \dots + c_{n, n+1}a_{n, n+1} \leq 0.$$

So sehen alle Reduktionsbedingungen aus, die  $c_{ik}$  können nur die Werte 0 oder  $+1$  annehmen. Wir haben nur endlich viele Reduktionsbedingungen, die alle linear sind. Hierauf habe ich Untersuchungen über den reduzierten Raum angestellt, ferner gezeigt, wie man feststellen kann, wann zwei gegebene Formen äquivalent sind und wie man die Automorphismen ermittelt.

### 3. Olga Taussky, Wien: Zur Theorie des Klassenkörpers.

Es werden Sätze über relativ-Abelsche unverzweigte Körper besprochen und der Fall, daß die Ordnung der Klassengruppe des Grundkörpers eine Potenz der Zahl 2 ist, näher behandelt. Hat jede absolute Idealklasse des Grundkörpers die Ordnung 2 selbst, so gilt, wenn die Klassengruppe des Klassenkörpers außerdem gewisse Bedingungen erfüllt, der folgende Satz:

Die genaue Anzahl der relativ-quadratischen unverzweigten Oberkörper, in welchen die gleiche Klasse  $c$  des Grundkörpers zur Hauptklasse wird, ist eine gerade Zahl.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich unter Benützung der von Artin und Furtwängler ausgearbeiteten gruppentheoretischen Methoden Aussagen machen über die Anzahl derjenigen Klassen des Grundkörpers, welche in den echten Unterkörpern des Klassenkörpers in die Hauptklasse übergehen.

Eine ausführliche Darstellung wird in den Monatsheften für Mathematik und Physik erscheinen.

### 4. K. Mahler, Göttingen: Einige Sätze über diophantische Approximationen.

Bezeichnungen:

$R$	Körper der rationalen Zahlen.
$J$	Ring der ganzen rationalen Zahlen.
$Q$	Körper der gewöhnlichen komplexen Zahlen.
$P$	Körper der $p$ -adischen Zahlen $\alpha = a_f p^f + a_{f+1} p^{f+1} + \dots$ ( $p$ ist eine feste Primzahl, $f$ eine ganze rationale Zahl, jedes $a_g$ eine der Zahlen $0, 1, \dots, p-1$ ).

$|a|$       Absolutbetrag einer Zahl aus  $R$ .

$f(x_1, y_1, \dots)$       Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten eines Polynoms  $f(x, y, \dots)$  mit Koeffizienten aus  $R$ .

$|\alpha|$        $\left\{ \begin{array}{l} \text{für } \alpha \text{ in } Q \text{ gewöhnlicher Absolutbetrag.} \\ \text{für } \alpha = a_f p^f + a_{f+1} p^{f+1} + \dots, \quad a_f \neq 0, \text{ in } P \text{ die } p\text{-adische Be-} \\ \text{wertung } |\alpha| = p^{-f}. \end{array} \right.$

Die klassische Theorie der Approximation gewöhnlicher komplexer Zahlen durch rationale oder algebraische Zahlen besitzt ein Analogon im Gebiete der  $p$ -adischen Zahlen, wie folgende Beispiele zeigen:

1. Wenn  $\alpha$  eine algebraische Zahl  $n$ ten Grades ( $n > 1$ ) aus  $Q$  ist und  $f(x)$  das irreduzible Polynom mit Koeffizienten aus  $J$ , dessen Wurzel  $\alpha$  war, so hat nach dem Thue-Siegelschen Satz jede der beiden Ungleichungen

$$\left| \frac{r}{s} - \alpha \right| \leq (\max(|\overline{r}|, |\overline{s}|))^{-2V\overline{n}} \quad \text{und} \quad \left| f\left(\frac{r}{s}\right) \right| \leq (\max(|\overline{r}|, |\overline{s}|))^{-2V\overline{n}}$$

höchstens endlichviele Lösungen in Zahlen  $r/s$  aus  $R$ . Das  $p$ -adische Analogon lautet vollständig gleich, wenn nur für  $\alpha$  eine Lösung der Gleichung

$$f(\alpha) = 0$$

in  $P$  genommen wird und man unter

$$\left| \frac{r}{s} - \alpha \right| \quad \text{bzw.} \quad \left| f\left(\frac{r}{s}\right) \right|$$

jetzt die  $p$ -adische Bewertung versteht. Hieraus folgt: Die höchste Potenz  $p^t$  einer festen Primzahl  $p$ , die in einer definiten irreduziblen Binärform  $n$ ten Grades  $f(r, s)$  mit Koeffizienten aus  $J$  aufgeht, wenn für  $r$  und  $s$  teilerfremde Zahlen aus  $J$  mit  $|\overline{r}| + |\overline{s}| \rightarrow \infty$  eingesetzt werden, ist von der Größenordnung  $p^t = o(\max(|\overline{r}|, |\overline{s}|)^{2V\overline{n}})$ . Gibt man also  $k$  beliebige Primzahlen vor und ist der Grad  $n > 4 \cdot k^2$ , so kann der Wert von  $f(r, s)$  nicht für alle Werte von  $r$  und  $s$  allein durch diese Primfaktoren teilbar sein.

Der Beweis des Analogons zum Thue-Siegelschen Satz gelingt durch eine Abänderung des bekannten Siegelschen Beweises; man erreicht so, daß die Schlüsse möglichst weit allein im Körper  $R$  und erst am Schluß in den Oberkörpern  $Q$  und  $P$  verlaufen.

2. Im Gebiete der komplexen Zahlen besteht folgendes Transzendenz-Kriterium: Eine Zahl  $\alpha$  aus  $Q$  ist dann und nur dann transzendent, wenn es zu jeder noch so großen positiven Zahl  $\Omega$  eine unendliche Folge

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$$

von Polynomen desselben Grades mit Koeffizienten aus  $J$  gibt, so daß

$$0 < |f_h(\alpha)| \leq |\overline{f_h(x)}|^{-\Omega} \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

ist. Dieses Kriterium gilt unverändert für Zahlen  $\alpha$  aus  $P$ , wenn wieder die Absolutstriche die  $p$ -adische Bewertung anzeigen. Dabei ist wie üblich unter einer transzendenten  $p$ -adischen Zahl eine Zahl aus  $P$  zu verstehen, die keiner algebraischen Gleichung mit Koeffizienten aus  $J$  genügt. Der Beweis für diese beiden Sätze verläuft vollständig gleich.

3. Es sei schließlich als ein Fall, wo die Analogie nicht mehr so vollständig ist, die Frage nach der Transzendenz der  $p$ -adischen Zahl

$$e^p = 1 + \frac{p}{1!} + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \dots$$

genannt. Anscheinend gelingt es nicht, die klassischen Beweise für die Transzendenz der Zahl  $e$  in  $Q$  auf diese Zahl  $e^p$  in  $P$  zu übertragen; dies rührt daher, daß die  $p$ -adische Exponentialreihe zu schlecht konvergiert und keine ganze Funktion mehr darstellt.

5. F. Lettenmeyer, München: Eine geometrische Entwicklung der Lehre von den regelmäßigen Kettenbrüchen.

Erscheint in diesem Jahresbericht.

6. M. Herzberger, Jena: Geometrische Fragen der Variationsrechnung.

Der Vortrag bezweckte, auf eine Behandlung von Variationsproblemen aufmerksam zu machen, mit denen der Vortragende auf dem Gebiet der geometrischen Optik gute Erfahrungen gemacht hatte. Es sei ein in den  $\dot{x}_i$  homogen gemachtes Variationsproblem gegeben:

$$(1) \quad \begin{aligned} E &= \int L(x_i, \dot{x}_i) dt \\ \delta E &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i &= L. \end{aligned}$$

Die Lösungen der Eulerschen Differentialgleichung, die Extremalen, sollen betrachtet werden. Jedem Punkt einer Extremalen ist eindeutig ein Vektor „ $n$ “ mit den Koordinaten  $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right)$  zugeordnet. Diesen Vektor bezeichne man als *Normalenvektor*.

Gegeben sei eine beliebige zusammenhängende Extremalenschar, von der man nicht voraussetzen braucht, daß sie ein Feld sei; auf jeder Extremalen sei ein Anfangspunkt  $a$  und ein Endpunkt  $a'$  gegeben.  $a$  und  $a'$  mögen stetige und stetig differenzierbare Funktionen der Scharkoordinaten sein. Das Extremalenintegral  $E$  zwischen Anfangs- und Endpunkt ist auch eine stetige und differenzierbare Funktion der Scharkoordinaten; unter Benutzung der Eulerschen Differentialgleichung folgt dann aus (1) durch partielle Integration die Beziehung

$$(2) \quad dE = n' da' - n da.$$

Gleichung (2) kann als Ausgangspunkt zur Untersuchung der geometrischen Eigenschaften von Extremalen dienen. Die geometrischen Eigenschaften der von einem Punkt ausgehenden Extremalen (Transversalflächen, Feldeigenschaften) folgen direkt; ebenso die Kneserschen Sätze über die Enveloppen. Das Integral

$$\int_1^2 n da = H$$

ist das Hilbertsche *Unabhängigkeitsintegral*, das naturgemäß in einem