INTERNATIONALER MATHEMATIKERKONGRESS ZÜRICH 1932
CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS ZURICH 1932

ÜBER DIE DARSTELLUNG VON ZAHLEN DURCH BINÄRFORMEN HÖHEREN GRADES

Von KURT MAHLER, Krefeld

Im Jahre 1908 zeigte Axel Thue durch ein höchst geistvolles Verfahren, das später von C. Siegel verallgemeinert wurde, daß die Anzahl $A(g)$ der Darstellungen einer ganzen rationalen Zahl g durch eine irreduzibile Binärform $F(x, y)$ vom Grad $n \geq 3$ mit ganzen rationalen Koeffizienten endlich ist. Verknüpft man die Thue-Siegelsche Methode mit der Henselschen Theorie der P-adischen Zahlen, so läßt sich ein allgemeinerer Endlichkeitssatz gewinnen, nämlich: „$F(x, y)$ ist nur für endlichviele Paare x, y ganzer rationaler Zahlen allein durch endlichviele feste Primzahlen teilbar.“ Schärfer gilt sogar: „Zu $F(x, y)$ gibt es eine nur von dieser Form abhängige Konstante c, so daß $A(g) \leq T(g)\, c^{t+1}$ ist, unter $T(g)$ die Anzahl der natürlichen Zahlen, deren n-te Potenz in g aufgeht, unter t die Anzahl der Primzahlen, durch die g teilbar ist, verstanden.“ Eine bemerkenswerte Folgerung aus diesen Endlichkeitssätzen lautet: „Besitzt eine Binärform $G(x, y)$ ganze rationale Koeffizienten und mindestens drei verschiedene Linearfaktoren, so wächst die größte in $F(x, y)$ enthaltene Primzahl über alle Grenzen, wenn x, y ganz rational teilerfremd sind und mindestens eine von ihnen gegen Unendlich strebt.“

Der Beweis dieser Sätze gelingt durch Zurückführung auf eine Aussage über die Annäherung algebraischer Zahlen: „Bedeutet $F(x, 1)$ ein irreduzibles Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten vom Grad $n \geq 3$, $P_1, P_2, \ldots, P_t$ endlichviele verschiedene Primzahlen, ζ eine reelle, ζ_τ für $\tau = 1, 2 \ldots, t$ eine P_τ-adische Nullstelle von $f(x)$, $|\alpha|$ den gewöhnlichen Absolutbetrag, $|\alpha|_{P_\tau}$ den P_τ-adischen Wert, $\beta > \min\limits_{s=1,2,\ldots,n-1} \left(\frac{n}{s+1} + s\right)$ eine Konstante, so besitzt die Ungleichung

$$\min\left(1, \left|\frac{p}{q} - \zeta\right|\right) \prod_{\tau=1}^{t} \min\left(1, \left|\frac{p}{q} - \zeta_\tau\right|_{P_\tau}\right) \leq \max\left(|p|, |q|\right)^{-\beta}$$

höchstens endlichviele Lösungen in gekürzten Brüchen.“

Um diesen Hilfssatz abzuleiten, stellt man nach dem Verfahren von Thue und Siegel Identitäten der Form

$$R(x,y) = (x - z)^r F(x,y,z) + (y - z)\, G(x,y,z) + F(x, 1)\, X(x,y,z)$$

auf, wo R, F, G, H Polynome mit kleinen ganzen rationalen Koeffizienten und r eine große natürliche Zahl ist. Identifiziert man dann x und y mit zwei Brüchen $\frac{p_1}{q_1}$ und

$\frac{p_2}{q_2}$, z der Reihe nach mit den Nullstellen $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_\tau$, so zeigt sich, daß die beiden Produkte

$$\min\left(1, \left|\frac{p_1}{q_1} - \zeta\right|\right) \prod_{\tau=1}^{t} \min\left(1, \left|\frac{p_1}{q_1} - \zeta_\tau\right|_{P_\tau}\right) \text{ und } \min\left(1, \left|\frac{p_2}{q_2} - \zeta\right|\right) \prod_{\tau=1}^{t} \min\left(1, \left|\frac{p_2}{q_2} - \zeta_\tau\right|_{P_\tau}\right)$$

nicht gleichzeitig klein sein können.