UEBER DIE DARSTELLUNGEN EINER ZAHL ALS SUMME VON DREI BIQUADRATEN.

VON

KURT MAHLER

in Groningen.

Sei $F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m)$ eine Form in endlichvielen Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_m$ mit ganzen rationalen Koeffizienten; in diesen Veränderlichen möge sie von der Dimension n sein. Ist weiter $k \neq 0$ eine beliebige ganze rationale Zahl, so bedeute $A(k)$ die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = k$$

in ganzen rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Der Kürze halber werde die folgende Bezeichnungsweise eingeführt:

„Wenn es zu jeder noch so grossen natürlichen Zahl t eine ganze rationale Zahl $k \neq 0$ mit $A(k) \geqq t$ gibt, so heisse die Form F von erster Art, andernfalls von zweiter Art."

Eine Form in nur einer Veränderlichen ist natürlich von zweiter Art. Dagegen scheint bisher nicht bekannt zu sein, ob es Formen zweiter Art in mindestens zwei Veränderlichen gibt. Eine solche Form könnte gewiss nicht von der Dimension 2 oder 3 sein. Denn aus der Theorie der quadratischen Formen ist wohl bekannt, dass dieselben für $m \geqq 2$ von der ersten Art sind, und dies lässt sich auch leicht elementar beweisen. Weiter habe ich in einer demnächst erscheinenden Arbeit gezeigt, dass jede kubische Binärform von erster Art ist; daraus folgt dasselbe für kubische Formen in mehr als zwei Veränderlichen. Denn eine solche Form $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ geht durch eine geeignete lineare Transformation

$$x_\mu = a_\mu u + b_\mu v \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten in eine kubische Binärform über, hat somit mindestens deren Wertevorat und ist folglich auch von erster Art.

Eine Form zweiter Art mit $m \geqq 2$ Veränderlichen müsste demnach mindestens von der Dimension $n \geqq 4$ sein. Weiter müsste für eine solche Form die Ungleichung

$$(1) \qquad m \leqq n$$

bestehen, d.h. die Dimension nicht kleiner als die Anzahl der Veränderlichen sein; denn es ist fast trivial, dass eine Form mit $m > n$ von der ersten Art ist. Umgekehrt braucht eine Form, die der Ungleichung (1) genügt, keineswegs von zweiter Art zu sein. Vielmehr werde ich in dieser Note an einigen Beispielen zeigen, dass es sogar Formen mit

$$m < n, \; n \geqq 4$$

gibt, die von erster Art sind; hierzu gehört insbesondere

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4,$$

so dass es also für jedes t natürliche Zahlen k gibt, die auf mehr als t verschiedene Weisen als Summe von drei Biquadraten darstellbar sind.

1) Hilfssatz 1: Eine Form $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ist dann und nur dann von erster Art, wenn es zu jeder natürlichen Zahl t eine rationale Zahl $r \neq 0$ gibt, so dass die Gleichung

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = r$$

mindestens t Lösungen in rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ hat.

Denn seien

$$(x_1^{(\tau)}, x_2^{(\tau)}, \ldots, x_m^{(\tau)}) \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t)$$

t solche Lösungen und Z eine natürliche Zahl, so dass alle Produkte

$$Zx_\mu^{(\tau)} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t; \; \mu = 1, 2, \ldots, m)$$

ganz rational werden; die Gleichung

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = rZ^n$$

hat dann in der Tat mindestens t Lösungen in ganzen rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m$; die gegebene Bedingung ist also hinreichend für Formen erster Art. Dass sie auch notwendig ist, ist trivial.

Hilfssatz 2: Eine Form $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ist von erster Art, wenn zu ihr eine ganze rationale Zahl $k \neq 0$ existiert, so dass die Gleichung

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = ky^n$$

unendlichviele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_m, y$ mit

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m, y) = 1, \; y \neq 0$$

hat.

Denn wenn diese Voraussetzung erfüllt ist, so besitzt die Gleichung

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_m) = k$$

unendlichviele verschiedene Lösungen in rationalen Zahlen, und die Voraussetzung von Hilfssatz 1 ist also für jedes t erfüllt.

2) Satz 1: Die biquadratische Ternärform

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$$

ist von erster Art.

Denn es besteht die Identität

$$x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2,$$

und wenn die neuen Parameter u, v durch

$$x = u^2 - v^2, \; y = 2uv + v^2$$

eingeführt werden, geht dieselbe über in

$$(u^2 - v^2)^4 + (2uv + v^2)^4 + (u^2 + 2uv)^4 = 2(u^2 + uv + v^2)^4.$$

Somit sind die Voraussetzungen von Hilfssatz 2 erfüllt; denn sind u, v teilerfremd zu einander, so gilt $(u + 2v \not\equiv 0 \bmod. 3)$

$$(u^2 - v^2,\; 2uv + v^2,\; u^2 + 2uv,\; u^2 + uv + v^2) = 1.$$

Der Beweis führt übrigens auch leicht zu einer unteren Schranke für den Wert von $A(k)$, wenn k eine geeignete Zahlfolge durchläuft. Um zu einem möglichst guten Wert zu kommen, wähle man etwa

$$k = 2P^4, \quad P = p_1 p_2 \ldots . p_s,$$

wo $p_1, p_2, \ldots . p_s$ die s ersten Primzahlen der Form $6h + 1$ sind; da die Gleichung

$$P = u^2 + uv + v^2$$

alsdann bekanntlich

$$2^{s-1}$$

verschiedene Lösungen in teilerfremden ganzen Zahlen u, v hat, so kommt man für solche Zahlen k, wenn dieselben hinreichend gross sind, zu der Ungleichung

$$A(k) \geqq e^{\frac{c \log k}{\log \log k}},$$

unter $c > 0$ eine geeignete Konstante verstanden.

3) Satz 2: Die Form 6. Dimension in 4 Veränderlichen

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^6 + x_2^6 + 8x_3^6 + 8x_4^6$$

ist von erster Art.

Der Beweis folgt aus der Identität

$$(u^2+2uv-v^2)^6+(u^2-2uv-v^2)^6+8(u^2-v^2)^6+8(2uv)^6= \\ =10(u^2+v^2)^6.$$

Satz 3: Die Form 8. Dimension in 5 Veränderlichen

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)=x_1^8+x_2^8+12x_3^8+12x_4^8+14x_5^8$$

ist von erster Art.

In diesem Fall benutzt man die Identität

$$(x^2+y^2)^8+(x^2-y^2)^8+12x^{16}+12y^{16}+14x^8y^8=14(x^4+y^4)^4$$

und beachtet, dass es zu der Binärform

$$F(u,\ v)=u^4+v^4$$

eine natürliche Zahl k gibt, so dass die Gleichung

$$F(u,\ v)=k_0t^2$$

unendlichviele Lösungen in ganzen rationalen Zahlen u, v besitzt.

Satz 4: Die Form 5. Dimension in 4 Veränderlichen

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=10x_1^5+20x_2^5+2x_3^5+x_4^5$$

ist von erster Art.

Zum Beweis benutzt man die Identität

$$(x^5+y^5)^5=10(x^4y)^5+20(x^2y^3)^5+2(y^5)^5+(x^5-y^5)^5.$$

Satz 5: Die Form 7. Dimension in 5 Veränderlichen

$$F(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)=14x_1^7+70x_2^7+42x_3^7+2x_4^7+x_5^7$$

ist von erster Art.

Dies folgt aus der Identität

$$(x^7+y^7)^7=14(x^6y)^7+70(x^4y^3)^7+42(x^2y^5)^7+2(y^7)^7+ \\ +(x^7-y^7)^7.$$