ÜBER PSEUDOBEWERTUNGEN. III.

(Die Pseudobewertungen der Hauptordnung eines endlichen algebraischen Zahlkörpers.)

VON

KURT MAHLER,

in KREFELD.

In § 21 des ersten Teiles dieser Abhandlung stellte ich die Vermutung auf, dass (mit Ausnahme der uneigentlichen und der trivialen) jede Pseudobewertung $W(\alpha)$ der Hauptordnung J eines endlichen algebraischen Zahlkörpers K der direkten Summe einer endlichen Anzahl von Absolutbetrag-Bewertungen, einer endlichen Anzahl von $\mathfrak{p}$-adischen Bewertungen und einer Restklassenpseudobewertung äquivalent sei. Diese Vermutung wird in der vorliegenden Arbeit in voller Allgemeinheit bewiesen.

Das erste Kapitel beschäftigt sich mit einer speziellen Klasse von Pseudobewertungen $W(\alpha|\tilde{\mathfrak{a}})$ von J, für die ein Unabhängigkeitssatz bewiesen wird. Die drei letzten Kapitel sind dem eingehenden Studium der willkürlichen Pseudobewertung $W(\alpha)$ von J gewidmet. Mit Hilfe klassischer Sätze über Einheiten und Ideale eines Zahlkörpers werden die drei Bestandteile von $W(\alpha)$: eine Summe endlichvieler Absolutbetragbewertungen $\Omega^{(l)}(\alpha)$, eine Summe endlichvieler $\mathfrak{p}$-adischer Bewertungen $\Omega_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ und eine Restklassen-Pseudobewertung $W_{\mathfrak{b}}(\alpha)$ isoliert, und alsdann gezeigt, dass deren direkte Summe in der Tat zu $W(\alpha)$ äquivalent ist. Wesentlich benutzt wird bei diesen Untersuchungen eine obere Abschätzung für $W(\alpha)$ vermöge gewisser Absolutbetrag-Bewertungen von J, und diese Abschätzung folgt ihrerseits aus einer Reihenentwicklung der Elemente von J, die die direkte Verallgemeinerung der dezimalen Schreibweise reeller Zahlen darstellt.

Die Untersuchungen sind in mancher Hinsicht verwandt mit denen aus Teil II, wo es sich um die Bestimmung der Pseudobewertungen von K handelte.

Ob es jedoch möglich ist, die beiden Ergebnisse aus Teil II und Teil III auseinander herzuleiten, habe ich bisher nicht feststellen können, und dies erscheint mir auch durchaus nicht sicher.

In sinngemässer Weise wie in Teil II und Teil III lassen sich die Pseudobewertungen des Körpers aller rationalen Funktionen und des Ringes aller Polynome in einer Veränderlichen behandeln, falls der Konstantenbereich ein Galoisfeld ist, und entsprechendes gilt auch noch für endliche algebraische Erweiterungen beider Ringe. Weiter können mit ähnlichen Methoden gewisse nichtkommutative hyperkomplexe Systeme mit endlicher Basis untersucht werden. —

Obwohl die Beweisführungen dieses und des vorangehenden Teiles ohne Schwierigkeit, wenn auch durch ziemlich komplizierte Betrachtungen, zu den gewünschten Ergebnissen führen, scheinen sie mir noch nicht die sachgemässen Methoden zu sein. Vielmehr wäre es wünschenswert, die Probleme als Strukturfragen aufzufassen und festzustellen, welche Ringe überhaupt perfekte Erweiterungen anderer Ringe in bezug auf Pseudobewertungen sein können. Vielleicht sind topologische Methoden für die Lösung dieser Frage von Nutzen.

I.

1. Im folgenden ist K ein fester algebraischer Zahlkörper n-ten Grades. Die $n = r_1 + 2r_2$ zu ihm konjugierten Körper

$$K^{(1)},\ K^{(2)},\ \ldots,\ K^{(n)}$$

sind derart numeriert, dass etwa die r_1 ersten von ihnen:

$$K^{(1)},\ K^{(2)},\ \ldots,\ K^{(r_1)}$$

reell, die übrigen $2r_2$:

$$K^{(r_1+1)},\ K^{(r_1+2)},\ \ldots,\ K^{(r_1+2r_2)}$$

dagegen imaginär sind, und zwar sollen jeweils

$$K^{(r_1+h)} \quad \text{und} \quad K^{(r_1+r_2+h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, r_2)$$

zueinander komplex konjugiert sein. (Es wird nicht ausgeschlossen, dass r_1 oder r_2 verschwindet). Weiter bedeutet J den Ring aller in K enthaltenen ganzen algebraischen Zahlen und entsprechenderweise $J^{(h)}$ für $h = 1, 2, \ldots, n$ den Ring aller ganzen Zahlen aus $K^{(h)}$. Ist ferner α ein beliebiges Element aus J oder K, so bezeichnet $\alpha^{(h)}$ die konjugierte Zahl aus $J^{(h)}$, bzw. aus $K^{(h)}$.

Ideale aus J werden durch kleine deutsche Buchstaben $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ bezeichnet; speziell sei $\mathfrak{o}$ das Ideal aller Zahlen in J, (0) das nur aus der Null bestehende Nullideal, und der Buchstabe $\mathfrak{p}$ werde für Primideale reserviert.

Neben diesen üblichen endlichen Idealen führen wir noch $r_1 + r_2$ *unendliche Primideale*

$$\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \mathfrak{p}_\infty^{(2)}, \ldots, \mathfrak{p}_\infty^{(r_1+r_2)}$$

ein, wobei für $h = 1, 2, \ldots, r_1$

$$\mathfrak{p}_\infty^{(h)} \text{ dem Körper } K^{(h)}$$

und für $h = 1, 2, \ldots, r_2$

$$\mathfrak{p}_\infty^{(r_1+h)} \text{ dem Körperpaar } K^{(r_1+h)},\ K^{(r_1+r_2+h)},$$

bzw. den entsprechenden Konjugierten des Ringes J zugeordnet wird. Höhere Potenzen dieser unendlichen Primideale treten nicht auf, wohl aber Produkte von verschiedenen derselben miteinander und mit endlichen Idealen. Allgemeiner betrachten wir formale Potenzprodukte

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_\infty^{(1)f^{(1)}} \mathfrak{p}_\infty^{(2)f^{(2)}} \ldots \mathfrak{p}_\infty^{(r_1+r_2)f^{(r_1+r_2)}} \mathfrak{p}_1^{f_1} \mathfrak{p}_2^{f_2} \ldots \mathfrak{p}_t^{f_t},$$

in denen die Exponenten der unendlichen Primideale gleich 0 oder 1, die der etwaigen endlichen Primideale aber nichtnegative ganze rationale Zahlen oder gleich ∞ sind; solche Ausdrücke nennen wir »*Pseudoideale*». Pseudoideale, die in den Primidealen und deren Exponenten übereinstimmen, wobei natürlicherweise Primideale mit Exponenten 0 als Faktoren hinzugenommen oder fortgelassen werden dürfen, heissen einander gleich; doch soll ein Pseudoideal, unter dessen Faktoren jedes unendliche Primideal $\mathfrak{p}_\infty^{(1)}, \mathfrak{p}_\infty^{(2)}, \ldots, \mathfrak{p}_\infty^{(r_1+r_2)}$ mit Exponenten 1 vorkommt, gleich dem Nullideal gesetzt werden, so dass also insbesondere

$$\mathfrak{p}_\infty^{(1)} \mathfrak{p}_\infty^{(2)} \ldots \mathfrak{p}_\infty^{(r_1+r_2)} = (0) \tag{1}$$

ist. Die endlichen Ideale $\mathfrak{a}$ von J sind spezielle Pseudoideale; genau wie für sie werde auch für die allgemeinen Pseudoideale vermöge der Darstellung als Produkt von Primidealpotenzen jeder der Begriffe »*kleinstes gemeinsames Vielfaches*», »*teilbar*» und »*teilerfremd*» definiert; dabei sollen aber Pseudoideale, deren kleinstes gemeinsames Vielfaches gleich (0) ist, *nie* als teilerfremd gelten. Insbesondere noch heisse das kleinste gemeinsame Vielfache von endlichvielen paarweise teilerfremden Pseudoidealen deren »*direktes Produkt*».

2. Jedem Pseudoideal kann bis auf Aequivalenz eindeutig eine Pseudobewertung von J zugeordnet werden:

a: Den beiden Idealen $\mathfrak{o}$ und (0) ordnen wir die *uneigentliche Pseudobewertung*

$$W(\alpha \mid \mathfrak{o}) = U(\alpha) = 0,$$

bzw. die *triviale Pseudobewertung*

$$W(\alpha \mid (0)) = W_0(\alpha) = \begin{cases} 0 \text{ für } \alpha = 0, \\ 1 \text{ für } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

zu.

b: Den $r_1 + r_2$ unendlichen Primidealen ordnen wir die *Absolutbetragbewertungen*

$$W(\alpha \mid \mathfrak{p}_\infty^{(h)}) = |\alpha^{(h)}| \qquad (h = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2)$$

zu.

c: Sei ferner $\mathfrak{p}$ ein beliebiges endliches Primideal von J. Ist f eine natürliche Zahl, so kann der Potenz $\mathfrak{p}^f$ die *Restklassen-Pseudobewertung*

$$W(\alpha \mid \mathfrak{p}^f) = \begin{cases} 0 \text{ für } \alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^f}, \\ 1 \text{ für } \alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^f} \end{cases}$$

zugeordnet werden; dagegen ordnen wir der unendlichen Potenz $\mathfrak{p}^\infty$ die *Henselsche* $\mathfrak{p}$-*adische Bewertung*

$$W(\alpha \mid \mathfrak{p}^\infty) = \begin{cases} 0 \text{ für } \alpha = 0, \\ e^{-g} \text{ für } \alpha \neq 0,\ \alpha \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^g},\ \alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^{g+1}} \end{cases}$$

zu.

d: Sei schliesslich

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_\infty^{(1) f^{(1)}} \mathfrak{p}_\infty^{(2) f^{(2)}} \ldots \mathfrak{p}_\infty^{(r_1+r_2) f^{(r_1+r_2)}} \mathfrak{p}_1^{f_1} \mathfrak{p}_2^{f_2} \ldots \mathfrak{p}_t^{f_t}$$

ein allgemeines Pseudoideal von J. Indem wir $e(f) = 0$ für $f = 0$ und $e(f) = 1$ für $f \neq 0$ setzen, können wir $\tilde{\mathfrak{a}}$ die Pseudobewertung

$$W(\alpha \mid \tilde{\mathfrak{a}}) = \sum_{h=1}^{r_1+r_2} e(f^{(h)})\, W(\alpha \mid \mathfrak{p}_\infty^{(h)}) + \sum_{\tau=1}^{t} e(f_\tau)\, W(\alpha \mid \mathfrak{p}_\tau^{f_\tau})$$

zuordnen.

Es ist evident, dass $W(\alpha \mid \tilde{\mathfrak{a}})$ für jedes $\tilde{\mathfrak{a}} \neq (0)$ eindeutig definiert ist. Für $\tilde{\mathfrak{a}} = (0)$ dagegen lässt sich nur zeigen, dass

$$W(\alpha|\tilde{\mathfrak{a}}) \sim W(\alpha|(0))$$

und also jetzt $W(\alpha|\tilde{\mathfrak{a}})$ nur noch bis auf eine Aequivalenz festgelegt ist. Um diese Formel zu beweisen, beachten wir zunächst, dass jedes Pseudoideal $\tilde{\mathfrak{a}} = (0)$ die Form

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{p}_\infty^{(1)} \mathfrak{p}_\infty^{(2)} \ldots \mathfrak{p}_\infty^{(r_1+r_2)} \tilde{\mathfrak{b}}$$

hat, wo das Pseudoideal $\tilde{\mathfrak{b}}$ höchstens durch endliche Primideale teilbar ist; man hat also

$$W(\alpha|\tilde{\mathfrak{a}}) = \sum_{h=1}^{r_1+r_2} W(\alpha|\mathfrak{p}_\infty^{(h)}) + W(\alpha|\tilde{\mathfrak{b}}).$$

Die $r_1 + r_2$ Ungleichungen

$$W(\alpha|\mathfrak{p}_\infty^{(h)}) < 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2)$$

haben nun aber offenbar keine anderen Lösungen α in J als $\alpha = 0$; daher gilt:

$$(2) \qquad \sum_{h=1}^{r_1+r_2} W(\alpha|\mathfrak{p}_\infty^{(h)}) \sim W(\alpha|(0))$$

und folglich erst recht:

$$W(\alpha|\tilde{\mathfrak{a}}) \sim W(\alpha|(0)) + W(\alpha|\tilde{\mathfrak{b}}) \sim W(\alpha|(0)).$$

3. Man sieht leicht ein, dass keine zwei verschiedenen der unter a, b oder c im vorigen Paragraphen zusammengestellten Pseudobewertungen einander äquivalent sind. Die zum gleichen endlichen Primideal gehörigen unendlichvielen Pseudobewertungen

$$W(\alpha|\mathfrak{p}^f) \qquad (f = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$$

genügen dabei den Relationen

$$W(\alpha|\mathfrak{p}) \subset W(\alpha|\mathfrak{p}^2) \subset W(\alpha|\mathfrak{p}^3) \subset \cdots \subset W(\alpha|\mathfrak{p}^\infty),$$

so dass eine Summe von endlichvielen dieser $W(\alpha|\mathfrak{p}^f)$ stets äquivalent zu demjenigen Summanden mit grössten f wird.

Weiter ergeben sich unschwer die folgenden zwei Aussagen:

a: *Wenn das Pseudoideal $\tilde{\mathfrak{a}}$ das kleinste gemeinsame Vielfache der endlichvielen Pseudoideale $\tilde{\mathfrak{a}}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \tilde{\mathfrak{a}}_q$ darstellt, so ist*

$$\sum_{l=1}^{q} W(\alpha|\tilde{\mathfrak{a}}_l) \sim W(\alpha|\tilde{\mathfrak{a}}).$$

b: *Wenn das Pseudoideal* $\mathfrak{a}$ *im zweiten Pseudoideal* $\tilde{\mathfrak{b}}$ *aufgeht, so ist*

$$W(\alpha|\tilde{\mathfrak{a}}) \subset W(\alpha|\tilde{\mathfrak{b}}).$$

Ferner gilt noch:

c: *Ist* $\tilde{\mathfrak{a}}$ *das direkte Produkt der Pseudoideale* $\tilde{\mathfrak{a}}_1, \tilde{\mathfrak{a}}_2, \ldots, \tilde{\mathfrak{a}}_q$, *so ist die Pseudobewertung* $W(\alpha|\tilde{\mathfrak{a}})$ *äquivalent der direkten Summe der Pseudobewertungen* $W(\alpha|\tilde{\mathfrak{a}}_1)$, $W(\alpha|\tilde{\mathfrak{a}}_2), \ldots, W(\alpha|\tilde{\mathfrak{a}}_q)$.

Diese Eigenschaft folgt in der Tat sehr leicht aus dem folgenden Satz, der in den nächsten Paragraphen bewiesen wird:

Satz 1: *Seien*

$$\mathfrak{p}_\infty^{(\lambda_1)}, \mathfrak{p}_\infty^{(\lambda_2)}, \ldots, \mathfrak{p}_\infty^{(\lambda_s)}$$

höchstens $r_1 + r_2 - 1$ *verschiedene der unendlichen Primideale von* J (s darf auch gleich 0 sein), *ferner*

$$\mathfrak{p}_1^{f_1}, \mathfrak{p}_2^{f_2}, \ldots, \mathfrak{p}_t^{f_t}$$

endlichviele Potenzen verschiedener endlicher Primideale von J *mit Exponenten, die entweder natürliche Zahlen oder gleich* ∞ *sind* (für $s \neq 0$ darf auch $t = 0$ sein). *Dann sind die* $s + t$ *Pseudobewertungen*

$$W(\alpha|\mathfrak{p}_\infty^{(\lambda_1)}),\ W(\alpha|\mathfrak{p}_\infty^{(\lambda_2)}),\ \ldots,\ W(\alpha|\mathfrak{p}_\infty^{(\lambda_s)}),\ W(\alpha|\mathfrak{p}_1^{f_1}),\ W(\alpha|\mathfrak{p}_2^{f_2}),\ \ldots,\ W(\alpha|\mathfrak{p}_t^{f_t})$$

von einander unabhängig.

4. Der Beweis von Satz 1 erfordert einige Hilfsbetrachtungen. Sei ζ irgend eine Zahl aus K, die genau von n-tem Grade ist; sie genügt also etwa der im Körper der rationalen Zahlen irreduziblen Gleichung

$$z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - + \cdots + (-1)^n a_n = 0$$

mit rationalen Koeffizienten, aber keiner solchen Gleichung von höchstens $(n-1)$-tem Grade. Dabei möge $n \geq 2$ sein, um triviale Ausnahmefälle auszuschliessen. Unter $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ verstehen wir die n verschiedenen zu ζ konjugierten, ganz willkürlich numerierten Zahlen; ζ selbst ist eine dieser Zahlen. Weiter bedeute ϑ eine reelle transzendente Zahl, z. B. e, und $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ seien n rationale Zahlen, die nicht alle gleich Null sind.

Die beiden Determinanten

$$D = \begin{vmatrix} \mathrm{I} & \zeta_1 & \ldots & \zeta_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{I} & \zeta_{n-2} & \ldots & \zeta_{n-2}^{n-1} \\ \mathrm{I} & \zeta_{n-1} & \ldots & \zeta_{n-1}^{n-1} \\ x_0 & x_1 & \ldots & x_{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad D^* = \begin{vmatrix} \mathrm{I} & \zeta_1 & \ldots & \zeta_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{I} & \zeta_{n-2} & \ldots & \zeta_{n-2}^{n-1} \\ \mathrm{I} & \vartheta & \ldots & \vartheta^{n-1} \\ x_0 & x_1 & \ldots & x^{n-1} \end{vmatrix}$$

ergeben sich offenbar aus den *Vandermonde*schen Determinanten

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \mathrm{I} & \zeta_1 & \ldots & \zeta_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{I} & \zeta_{n-2} & \ldots & \zeta_{n-2}^{n-1} \\ \mathrm{I} & \zeta_{n-1} & \ldots & \zeta_{n-1}^{n-1} \\ \mathrm{I} & x & \ldots & x^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \varDelta^* = \begin{vmatrix} \mathrm{I} & \zeta_1 & \ldots & \zeta_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{I} & \zeta_{n-2} & \ldots & \zeta_{n-2}^{n-1} \\ \mathrm{I} & \vartheta & \ldots & \vartheta^{n-1} \\ \mathrm{I} & x & \ldots & x^{n-1} \end{vmatrix},$$

indem man diese letzteren als Polynome in x schreibt und danach x^i durch x_i ersetzt. Bezeichnen wir also mit

$$\sigma_1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_{n-1},\ \sigma_2 = \zeta_1\zeta_2 + \cdots + \zeta_{n-2}\zeta_{n-1},\ \ldots,\ \sigma_{n-1} = \zeta_1\zeta_2\ldots\zeta_{n-1}$$

die elementarsymmetrischen Funktionen von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$, und mit

$$\tau_1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \vartheta,\ \tau_2 = \zeta_1\zeta_2 + \cdots + \zeta_{n-2}\vartheta,\ \ldots,\ \tau_{n-1} = \zeta_1\zeta_2\ldots\vartheta$$

die elementarsymmetrischen Funktionen von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-2}, \vartheta$, und berücksichtigen wir die bekannte Darstellung der *Vandermonde*schen Determinanten als Differenzenprodukt, so ergibt sich:

$$D = \delta\ (x_{n-1} - \sigma_1 x_{n-2} + \sigma_2 x_{n-3} - + \cdots + (-\mathrm{I})^{n-1}\sigma_{n-1}x_0),$$
$$D^* = \delta^*(x_{n-1} - \tau_1 x_{n-2} + \tau_2 x_{n-3} - + \cdots + (-\mathrm{I})^{n-1}\tau_{n-1}x_0),$$

wo δ das Differenzenprodukt von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ und δ^* das von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-2}, \vartheta$ bedeutet; dabei ist natürlich nach unseren Voraussetzungen:

$$\delta \neq \mathrm{o}, \quad \delta^* \neq \mathrm{o}.$$

Wegen

$$(z^{n-1} - \sigma_1 z^{n-2} + \sigma_2 z^{n-3} - + \cdots + (-\mathrm{I})^{n-1}\sigma_{n-1})(z - \zeta_n) \equiv$$
$$\equiv z^n - a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} - + \cdots + (-\mathrm{I})^n a_n$$

gilt nun

$$\sigma_1 = a_1 - \zeta_n,\ \ \sigma_2 = a_2 - \zeta_n a_1 + \zeta_n^2,\ \ \sigma_3 = a_3 - \zeta_n a_2 + \zeta_n^2 a_1 - \zeta_n^3,\ \ldots,$$
$$\sigma_{n-1} = a_{n-1} - \zeta_n a_{n-2} + \zeta_n^2 a_{n-3} - + \cdots + (-1)^{n-1} \zeta_n^{n-1},$$

also

$$D = \delta\{(x_{n-1} - a_1 x_{n-2} + a_2 x_{n-3} - + \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} x_0) +$$
$$+ \zeta_n (x_{n-2} - a_1 x_{n-3} + a_2 x_{n-4} - + \cdots + (-1)^{n-2} a_{n-2} x_0) + \cdots + \zeta_n^{n-2}(x_1 - a_1 x_0) + \zeta_n^{n-1} x_0\}.$$

Folglich stellt $\frac{D}{\delta}$ ein Polynom in ζ_n von höchstens $(n-1)$-tem Grade und mit rationalen Koeffizienten, die nicht alle verschwinden, dar (denn ist $x_0 = \cdots = x_{i-1} = 0$, $x_i \neq 0$, so hat ζ_n^{n-i-1} einen von Null verschiedenen Koeffizienten), und da ζ_n genau vom Grad n ist, so ergibt sich:

$$D \neq 0.$$

Um zu einem analogen Ergebnis für D^* zu gelangen, werde

$$\varrho_1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_{n-2},\ \ \varrho_2 = \zeta_1 \zeta_2 + \cdots + \zeta_{n-3}\zeta_{n-2},\ \ldots,\ \varrho_{n-2} = \zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_{n-2}$$

für die elementarsymmetrischen Funktionen von $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-2}$ gesetzt. Alsdann ist

$$\sigma_1 = \varrho_1 + \zeta_{n-1},\ \ \sigma_2 = \varrho_2 + \varrho_1 \zeta_{n-1},\ \ \sigma_3 = \varrho_3 + \varrho_2 \zeta_{n-1},\ \ldots,$$
$$\sigma_{n-2} = \varrho_{n-2} + \varrho_{n-3}\zeta_{n-1},\ \ \sigma_{n-1} = \varrho_{n-2}\zeta_{n-1}$$

und ebenso

$$\tau_1 = \varrho_1 + \vartheta,\ \ \tau_2 = \varrho_2 + \varrho_1 \vartheta,\ \ \tau_3 = \varrho_3 + \varrho_2 \vartheta,\ \ldots,\ \tau_{n-2} = \varrho_{n-2} + \varrho_{n-3}\vartheta,\ \ \tau_{n-1} = \varrho_{n-2}\vartheta,$$

also auch

$$D = \delta\{(x_{n-1} - \varrho_1 x_{n-2} + \varrho_2 x_{n-3} - + \cdots + (-1)^{n-2} \varrho_{n-2} x_1) -$$
$$- \zeta_{n-1}(x_{n-2} - \varrho_1 x_{n-3} + \varrho_2 x_{n-4} - + \cdots + (-1)^{n-2} \varrho_{n-2} x_0)\}$$

und

$$D^* = \delta^*\{(x_{n-1} - \varrho_1 x_{n-2} + \varrho_2 x_{n-3} - + \cdots + (-1)^{n-2} \varrho_{n-2} x_1) -$$
$$- \vartheta(x_{n-2} - \varrho_1 x_{n-3} + \varrho_2 x_{n-4} - + \cdots + (-1)^{n-2} \varrho_{n-2} x_0)\}.$$

Aus diesen beiden Formeln für D und D^* folgt nun sofort die Ungleichung

$$D^* \neq 0.$$

Denn wäre $D^* = 0$, so müssten wegen $\delta^* \neq 0$ und der Transzendenz von ϑ die zwei Beziehungen

$$x_{n-1} - \varrho_1 x_{n-2} + \varrho_2 x_{n-3} - + \cdots + (-1)^{n-2} \varrho_{n-2} x_1 = 0 \text{ und}$$
$$x_{n-2} - \varrho_1 x_{n-3} + \varrho_2 x_{n-4} - + \cdots + (-1)^{n-2} \varrho_{n-2} x_0 = 0$$

erfüllt sein; daher wäre erst recht $D = 0$, und das ist falsch.

5. Man kann für zwei noch allgemeinere Determinanten als D und D^* das Nichtverschwinden nachweisen.

Seien dazu

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$$

n Zahlen aus K, die in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen linear unabhängig sind. Es gibt also eine quadratische n-reihige Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mit nichtverschwindender Determinante, deren sämtliche Elemente rationale Zahlen sind, so dass

$$\omega_h = a_{h1} + a_{h2}\zeta + \cdots + a_{hn}\zeta^{n-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$y_h = a_{h1} x_0 + a_{h2} x_1 + \cdots + a_{hn} x_{n-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

und

$$\theta_h = a_{h1} + a_{h2}\vartheta + \cdots + a_{hn}\vartheta^{n-1} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

so sind die n Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gleichzeitig mit den $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ alle rational und nicht sämtlich gleich Null, ferner die $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ alle reell und für transzendentes ϑ linear unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen.

Verstehen wir jetzt unter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ irgend eine Permutation der n Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und bezeichnen wir mit $\omega_h^{(\lambda_k)}$ wie früher die zu ω_h konjugierte Zahl aus $K^{(\lambda_k)}$, so können wir folgende zwei Sätze aussprechen:

a: *Sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ beliebige rationale Zahlen, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so ist*

$$\begin{vmatrix} \omega_1^{(\lambda_1)} & \omega_2^{(\lambda_1)} & \dots & \omega_n^{(\lambda_1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{(\lambda_{n-1})} & \omega_2^{(\lambda_{n-1})} & \dots & \omega_n^{(\lambda_{n-1})} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

b: *Zu* $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ *gibt es* n *reelle Zahlen* $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ (die sogar linear unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen gewählt werden können) *mit der folgenden Eigenschaft: Sind* $y_1, y_2, \dots, y_n$ *beliebige rationale Zaklen, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so ist*

$$\begin{vmatrix} \omega_1^{(\lambda_1)} & \omega_2^{(\lambda_1)} & \dots & \omega_n^{(\lambda_1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{(\lambda_{n-2})} & \omega_2^{(\lambda_{n-2})} & \dots & \omega_n^{(\lambda_{n-2})} \\ \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Diese beiden Sätze folgen sofort, wenn wir berücksichtigen, dass die zwei in ihnen auftretenden Determinanten offenbar aus D und D^* durch Multiplikation mit der Determinante von Ω hervorgehen.

6. Nunmehr kann zum Beweis von Satz 1 übergegangen werden. Nach dem ersten Teil dieser Arbeit ist mit einem endlichen System von Pseudobewertungen auch jedes Teilsystem unabhängig. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir daher annehmen, dass die Anzahl s in Satz 1 genau gleich $r_1 + r_2 - 1$ ist, dass also sämtliche Absolutbetragbewertungen

$$W(\alpha \mid \mathfrak{p}_\infty^{(h)}) \qquad (h = 1, 2, \dots, r_1 + r_2)$$

mit Ausnahme von genau einer, etwa der vom Index λ, $1 \leq \lambda \leq r_1 + r_2$ berücksichtigt werden. Ausser diesen treten noch die Pseudobewertungen

$$W(\alpha \mid \mathfrak{p}_\tau^{f_\tau}) \qquad (\tau = 1, 2, \dots, t)$$

auf, die zu Potenzen endlicher Primideale mit natürlichem oder unendlich grossem Exponenten gehören.

Auf Grund der Definition der Unabhängigkeit von Pseudobewertungen und der speziellen Pseudobewertungen $W(\alpha \mid \mathfrak{p}_\infty^{(h)})$ und $W(\alpha \mid \mathfrak{p}^f)$ ist nun klar, dass Satz 1 vollständig gleichwertig ist mit dem folgenden Satz, in dem der Begriff »Pseudobewertung» nicht mehr vorkommt:

Satz 1 a: *Seien*

$$\Gamma_h \qquad (h=1, 2, \ldots, \lambda-1, \lambda+1, \ldots, r_1+r_2)$$

r_1+r_2-1 *beliebige Zahlen, die für* $h \leq r_1$ *reell, für* $h \geq r_1+1$ *komplex sind, ferner*

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_t$$

endlichviele verschiedene Primideale in J,

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$$

ebensoviele beliebige Zahlen aus diesem Ring, schliesslich ε *eine beliebig kleine positive und* f *eine beliebig grosse natürliche Zahl. Dann gibt es eine Zahl* α *aus* J *mit den Konjugierten* $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}$, *die den folgenden Bedingungen genügt:*

$$|\alpha^{(h)} - \Gamma_h| \leq \varepsilon \qquad (h=1, 2, \ldots, \lambda-1, \lambda+1, \ldots, r_1+r_2),$$

$$\alpha \equiv \gamma_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau^f} \qquad (\tau=1, 2, \ldots, t).$$

Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass wegen der Teilerfremdheit der t Primidealpotenzen $\mathfrak{p}_1^f, \mathfrak{p}_2^f, \ldots, \mathfrak{p}_t^f$ die Kongruenzforderungen von Satz 1 a in eine einzige Kongruenz

$$\alpha \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{c}} \qquad (\mathfrak{c}=\mathfrak{p}_1^f, \mathfrak{p}_2^f, \ldots, \mathfrak{p}_t^f),$$

wo γ eine geeignete Zahl aus J bedeutet, zusammengefasst werden können. Es genügt daher, die Lösbarkeit eines Bedingungssystems

$$|\alpha^{(h)} - \Gamma_h| \leq \varepsilon \qquad (h=1, 2, \ldots, \lambda-1, \lambda+1, \ldots, r_1+r_2),$$

$$\alpha \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{c}}$$

nachzuweisen. Diese Lösbarkeit ist für $r_1+r_2-1=0$, also im Falle des Körpers der rationalen Zahlen oder eines imaginär-quadratischen Körpers sofort klar, da alsdann die Ungleichungen nicht auftreten. Sei daher weiterhin $r_1+r_2-1>0$, also $n \geq 2$.

Das Ideal $\mathfrak{c}$ habe eine Basis

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n,$$

die vorige Kongruenzforderung lässt sich also befriedigen durch

$$\alpha = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \cdots + a_n\omega_n + \gamma,$$

wo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige ganze rationale Zahlen sind. Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass diese Zahlen a so gewählt werden können, dass auch

$$|a_1\omega_1^{(h)} + a_2\omega_2^{(h)} + \cdots + a_n\omega_n^{(h)} - \varDelta_h| \leq \varepsilon \quad (h = 1, 2, \ldots, \lambda - 1, \lambda + 1, \ldots, r_1 + r_2)$$

ist; dabei bedeutet

$$\varDelta_h = \varGamma_h - \gamma^{(h)} \quad (h = 1, 2, \ldots, \lambda - 1, \lambda + 1, \ldots, r_1 + r_2)$$

für $h \leq r_1$ offenbar eine reelle, für $h \geq r_1 + 1$ eine komplexe Zahl.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\omega_k^{(h)} = \begin{cases} \omega_{hk} & \text{für } k = 1, 2, \ldots, n;\ 1 \leq h \leq r_1,\ h \neq \lambda, \\ \omega_{hk} + i\,\omega_{h+r_2, k} & \text{für } k = 1, 2, \ldots, n;\ r_1 + 1 \leq h \leq r_1 + r_2,\ h \neq \lambda, \end{cases}$$

und

$$\varDelta_h = \begin{cases} \delta_h & \text{für } 1 \leq h \leq r_1,\ h \neq \lambda, \\ \delta_h + i\,\delta_{h+r_2} & \text{für } r_1 + 1 \leqq h \leq r_1 + r_2,\ h \neq \lambda, \end{cases}$$

wo alle neuen Zahlen ω_{hk} und δ_h reell sind. Die vorigen Ungleichungen sind dann gewiss erfüllt, wenn wir ganze rationale Zahlen a mit

$$\text{(A):} \qquad |a_1\,\omega_{h1} + a_2\,\omega_{h2} + \cdots + a_n\,\omega_{hn} - \delta_h| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, 3, \ldots, n \\ h \neq \lambda \text{ für } \lambda = r_1, \\ h \neq \lambda \text{ und } \neq \lambda + r_2 \text{ für } \lambda \geq r_1 + 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen können. Um zu solchen Zahlen zu gelangen, sind zwei Fälle zu unterscheiden.

7. In den *Kronecker*schen Ergebnissen über die näherungsweise Lösung von linearen Gleichungen ist u. a der folgende Satz enthalten[1]:

a: *Für keine n rationale Zahlen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, die nicht alle zugleich Null sind, möge die Determinante*

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-11} & c_{n-12} & \ldots & c_{n-1n} \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{vmatrix}$$

mit reellen Elementen c_{hk} verschwinden. Dann gibt es zu beliebigen $n-1$ reellen Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ und zu jedem positiven ε n ganze rationale Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit

[1] Siehe L. KRONECKER's Werke, Bd. III, 1 (1899): »Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen», S. 49—109. Die dortigen Buchstaben $p, q, r, \mathfrak{r}$ haben bezw. die Werte $p = n - 1$, $q = n$, $r = n - 1$, $\mathfrak{r} = n - 1$ im obigen Hilfsatz.

$$|c_{h1}x_1+c_{h2}x_2+\cdots+c_{hn}x_n-x_h|\leq\varepsilon \qquad (h=1,2,\ldots,n-1).$$

Ist erstens $\lambda\leq r_1$, so liefert dieser Satz sogleich die Lösbarkeit von (A). Denn auf Grund der Beziehungen zwischen den $\omega_k^{(h)}$ und den ω_{hk} sind die beiden Determinanten

$$d_1=\begin{vmatrix}\omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega_{\lambda-1\,1} & \omega_{\lambda-1\,2} & \ldots & \omega_{\lambda-1\,n}\\ \omega_{\lambda+1\,1} & \omega_{\lambda+1\,2} & \ldots & \omega_{\lambda+1\,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \ldots & \omega_{nn}\\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{vmatrix} \quad\text{und}\quad d_2=\begin{vmatrix}\omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \ldots & \omega_n^{(1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega_1^{(\lambda-1)} & \omega_2^{(\lambda-1)} & \ldots & \omega_n^{(\lambda-1)}\\ \omega_1^{(\lambda+1)} & \omega_2^{(\lambda+1)} & \ldots & \omega_n^{(\lambda+1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega_1^{(n)} & \omega_2^{(n)} & \ldots & \omega_n^{(n)}\\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{vmatrix}$$

mit einander offenbar durch die Gleichung

$$(-2i)^{r_2}d_1=d_2$$

verknüpft; nach § 5, Hilfssatz a aber $d_2\neq 0$ und folglich auch $d_1\neq 0$, wenn für die y beliebige rationale Zahlen eingesetzt werden, die nicht alle gleich Null sind.

Ist zweitens $\lambda\geq r_1+1$, so zeigt der *Kronecker*sche Satz sogar die Lösbarkeit des erweiterten Ungleichungssystems

$$|a_1\omega_{h1}+a_2\omega_{h2}+\cdots+a_n\omega_{hn}-\delta_h|\leq\frac{\varepsilon}{2}\qquad\begin{pmatrix}h=1,2,\ldots,n\\ h\neq\lambda \text{ und }\neq\lambda+r_2\end{pmatrix},$$

$$|a_1\theta_1+a_2\theta_2+\cdots+a_n\theta_n|\leq\frac{\varepsilon}{2},$$

wo $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n$ n reelle Zahlen sind, über die wir sogleich verfügen. In der Tat sind die beiden Determinanten

$$d_1'=\begin{vmatrix}\omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega_{\lambda-1\,1} & \omega_{\lambda-1\,2} & \ldots & \omega_{\lambda-1\,n}\\ \omega_{\lambda+1\,1} & \omega_{\lambda+1\,2} & \ldots & \omega_{\lambda+1\,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega_{\lambda+r_2-1\,1} & \omega_{\lambda+r_2-1\,2} & \ldots & \omega_{\lambda+r_2-1\,n}\\ \omega_{\lambda+r_2+1\,1} & \omega_{\lambda+r_2+1\,2} & \ldots & \omega_{\lambda+r_2+1\,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \ldots & \omega_{nn}\\ \theta_1 & \theta_2 & \ldots & \theta_n\\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{vmatrix} \quad\text{und}\quad d_2'=\begin{vmatrix}\omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)} & \ldots & \omega_n^{(1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega_1^{(\lambda-1)} & \omega_2^{(\lambda-1)} & \ldots & \omega_n^{(\lambda-1)}\\ \omega_1^{(\lambda+1)} & \omega_2^{(\lambda+1)} & \ldots & \omega_n^{(\lambda+1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega_1^{(\lambda+r_2-1)} & \omega_2^{(\lambda+r_2-1)} & \ldots & \omega_n^{(\lambda+r_2-1)}\\ \omega_1^{(\lambda+r_2+1)} & \omega_2^{(\lambda+r_2+1)} & \ldots & \omega_n^{(\lambda+r_2+1)}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \omega_1^{(n)} & \omega_2^{(n)} & \ldots & \omega_n^{(n)}\\ \theta_1 & \theta_2 & \ldots & \theta_n\\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{vmatrix}$$

miteinander offenbar durch die Gleichung

$$(-2i)^{r_2-1}\, d_1' = d_2'$$

verknüpft; nach § 5, Hilfssatz b lassen sich die Zahlen $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ aber so bestimmen, dass d_2' und folglich auch d_1' niemals gleich Null ist, wenn für $y_1, y_2, \ldots, y_n$ beliebige rationale Zahlen, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, eingesetzt werden.

Damit ist in beiden Fällen Satz 1 a und also auch Satz 1 auf Grund des *Kronecker*schen Satzes a bewiesen; in der Tat genügt es, diesen mit geeigneten Werten für die Zahlen c_{hk} und c_h und mit $\frac{\varepsilon}{2}$ statt ε anzuwenden, um der Existenz einer Lösung von (A) sicher zu sein.

II.

8. Nachdem wir im ersten Kapitel die Pseudobewertungen der speziellen Gestalt

$$W(\alpha \,|\, \tilde{\mathfrak{a}})$$

untersucht haben, werden wir im folgenden beliebige Pseudobewertungen

$$W(\alpha)$$

von J betrachten und versuchen, zu jeder solchen Funktion eine möglichst einfache ihr äquivalente Pseudobewertung zu ermitteln. Dabei ist es jedoch der Kürze halber zweckmässig, statt der bisherigen Bezeichnungen

$$\begin{array}{lll} U(\alpha) & \text{für} & W(\alpha \,|\, \mathfrak{v}), \\ W_0(\alpha) & \text{für} & W(\alpha \,|\, (0)), \\ \Omega^{(h)}(\alpha) & \text{für} & W(\alpha \,|\, \mathfrak{p}_\infty^{(h)}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2), \\ \Omega_{\mathfrak{p}}(\alpha) & \text{für} & W(\alpha \,|\, \mathfrak{p}^\infty), \end{array}$$

und

$$W_{\mathfrak{p},f}(\alpha) \quad \text{für} \quad W(\alpha \,|\, \mathfrak{p}^f) \qquad (f = 1, 2, 3, \ldots)$$

zu schreiben; auch werden wir häufig das Argument α fortlassen, wenn es sich um Beziehung mehrerer Pseudobewertungen zu einander handelt.

Alle weiteren Entwicklungen beruhen wesentlich auf einer besonderen Art von Reihenentwicklung für die Elemente aus J, die gewissermassen die Verallgemeinerung der gewöhnlichen *dezimalen Darstellung* der natürlichen Zahlen bildet.

9. Wir beginnen mit einem Hilfssatz, auf dessen Analogie zu Satz 1 a ausdrücklich hingewiesen sei:

a: *Es gibt eine positive Zahl c_1, die allein vom Ring J abhängt, mit der folgenden Eigenschaft: Sind*

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{r_1+r_2}$$

beliebige r_1+r_2 Zahlen, von denen die r_1 ersten reell, die r_2 letzten aber komplex sind, so existiert eine Zahl β aus J, die den r_1+r_2 Ungleichungen

$$|\beta^{(h)} - B_h| \leq c_1 \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ r_1+r_2)$$

genügt.

Zum Beweis sei

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$$

eine Basis von J, so dass jede Zahl α dieses Ringes in der Form

$$\alpha = a_1\,\omega_1 + a_2\,\omega_2 + \cdots + a_n\,\omega_n$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ dargestellt werden kann. Offenbar besitzen die Gleichungen

$$r'_1\,\omega_1^{(h)} + r'_2\,\omega_2^{(h)} + \cdots + r'_n\,\omega_n^{(h)} = B_h \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ r_1+r_2)$$

genau eine Lösung in reellen Zahlen $r'_1,\ r'_2,\ \ldots,\ r'_n$. Wir bestimmen die n ganzen rationalen Zahlen $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$, die den Ungleichungen

$$|b_h - r'_h| \leq \frac{1}{2} \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

genügen. Setzen wir dann

$$\beta = b_1\,\omega_1 + b_2\,\omega_2 + \cdots + b_n\,\omega_n$$

und verstehen wir unter c_1 die Konstante

$$c_1 = \frac{1}{2}\cdot \max_{h=1,2,\ldots,r_1+r_2}\left(|\omega_1^{(h)}| + |\omega_2^{(h)}| + \cdots + |\omega_n^{(h)}|\right),$$

so ist in der Tat

$$|\beta^{(h)} - B_h| \leq c_1 \qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ r_1+r_2).$$

In Hilfssatz a ist insbesondere enthalten:

b: *Die $q+\varkappa = r_1 + r_2$ natürlichen, von einander verschiedenen Zahlen*

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_q,\ \ \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_\varkappa$$

mögen zusammen die Zahlmenge

$$1,\ 2,\ \ldots,\ r_1 + r_2$$

bilden. Dann gibt es zu jeder Zahl ϱ aus K eine Zahl γ aus J mit

$$|\gamma^{(\lambda)}| \leq c_1 \qquad (\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_q),$$

$$|\varrho^{(\mu)} - \gamma^{(\mu)}| \leq c_1 \qquad (\mu = \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_\varkappa).$$

10. Durchläuft ϱ die Elemente von K, so definieren[1]

$$\Phi(\varrho) = \max_{\lambda=\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_q} |\varrho^{(\lambda)}| \qquad \text{und} \qquad \Psi(\varrho) = \max_{\mu=\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_\varkappa} |\varrho^{(\mu)}|,$$

wo die λ und μ dieselbe Bedeutung wie im vorigen Hilfssatz haben, offenbar zwei *Pseudobewertungen* dieses Körpers und also erst recht von J. Sei

$$\varkappa \geq 1$$

und bezeichne ferner $\eta \neq 0$ eine Zahl aus J mit

$$|\eta^{(\lambda)}| < 1 \qquad (\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_q),$$

$$|\eta^{(\mu)}| > 1 \qquad (\mu = \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_\varkappa),$$

also erst recht mit

$$\Phi(\eta) < 1, \qquad \Psi(\eta) > 1.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$C_1 = c_1, \qquad C_2 = c_1 \Psi(\eta).$$

Ist α eine beliebige Zahl aus J mit

$$\Psi(\alpha) > C_2,$$

so gibt es offenbar eine grösste ganze rationale Zahl g, für die die Zahl

$$\varrho = \alpha\, \eta^{-g}$$

aus K der Ungleichung

[1] Für $q = 0$ sei $\Phi(\varrho) = 0$ für alle ϱ.

$$\Psi(\varrho) > C_1$$

genügt. Dabei ist der Exponent $g \geq 1$, denn man hat

$$\Psi(\alpha\,\eta^{-1}) \geq \frac{\Psi(\alpha)}{\Psi(\eta)} > \frac{C_2}{C_2 : C_1} = C_1,$$

und ferner gilt für ϱ die Abschätzung

$$\Psi(\varrho) \leq C_2,$$

denn wäre $\Psi(\varrho) > C_2$, so folgte

$$\Psi(\varrho\,\eta^{-1}) \geq \frac{\Psi(\varrho)}{\Psi(\eta)} > \frac{C_2}{C_2 : C_1} = C_1,$$

entgegen der Maximalannahme über g.

Nach Hilfssatz b des vorigen Paragraphen gibt es eine Zahl γ aus J mit

$$\Phi(\gamma) \leq C_1, \quad \Psi(\varrho - \gamma) \leq C_1,$$

so dass also insbesondere

$$\Psi(\gamma) \leq \Psi(\varrho - \gamma) + \Psi(\varrho) \leq C_1 + C_2$$

ist. Setzen wir

$$\alpha_1 = \eta^g(\varrho - \gamma) = \alpha - \gamma\,\eta^g,$$

so besteht ferner die Ungleichung

(A): $$\Psi(\alpha_1\,\eta^{-g}) \leq C_1.$$

Wenn auch noch

$$\Psi(\alpha_1) > C_2$$

ist, so bedeute g_1 die grösste ganze rationale Zahl, für die die Zahl

$$\varrho_1 = \alpha_1\,\eta^{-g_1}$$

aus K der Ungleichung

$$\Psi(\varrho_1) > C_1$$

genügt. Wegen (A) ist notwendigerweise

$$g_1 < g;$$

ferner folgt wie vorhin

$$g_1 \geq 1, \quad \Psi(\varrho_1) \leq C_2.$$

Weiter sei γ_1 eine Zahl aus J mit

$$\Phi(\gamma_1) \leq C_1, \quad \Psi(\varrho_1 - \gamma_1) \leq C_1,$$

also

$$\Psi(\gamma_1) \leq C_1 + C_2,$$

und ferner

$$\alpha_2 = \eta^{g_1}(\varrho_1 - \gamma_1) = \alpha - (\gamma\,\eta^g + \gamma_1\,\eta^{g_1}),$$

also

$$\Psi(\alpha_2\,\eta^{-g_1}) \leq C_1.$$

Ist auch noch

$$\Psi(\alpha_2) > C_2,$$

so können wir das Verfahren wiederholen, usw. Da die Exponenten $g, g_1, \ldots$ sämtlich natürliche Zahlen sind und

$$g > g_1 > \cdots \geq 1$$

ist, so muss notwendigerweise einmal ein Index f auftreten, für den die Zahl

$$\alpha_f = \eta^{g_{f-1}}(\varrho_{f-1} - \gamma_{f-1}) = \alpha - (\gamma\,\eta^g + \gamma_1\,\eta^{g_1} + \cdots + \gamma_{f-1}\,\eta^{g_{f-1}})$$

der Ungleichung

$$\Psi(\alpha_f) \leq C_2$$

genügt; dabei sind alsdann in dieser Reihenentwicklung die Exponenten g_i abnehmende natürliche Zahlen, die Koeffizienten γ_i dagegen Zahlen aus J mit

$$\Phi(\gamma_i) \leq C_1, \quad \Psi(\gamma_i) \leq C_1 + C_2 \qquad (i = 0, 1, \ldots, f-1),$$

und wenn wir

$$\Phi(\eta) = \theta$$

(so dass also $\theta < 1$ ist) und

$$1 + C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j = 1 + \frac{C_1}{1-\theta} = C_3$$

setzen, so wird gerade für $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$

$$\Omega^{(\lambda)}(\alpha_f) \leq \Omega^{(\lambda)}(\alpha) + \sum_{i=0}^{f-1} \Phi(\gamma_i)\,\Phi(\eta)^{g_i} \leq \Omega^{(\lambda)}(\alpha) + C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \theta^j \leq C_3 \max(\Omega^{(\lambda)}(\alpha), 1).$$

Damit haben wir gezeigt:

a: *In J existiere eine Zahl $\eta \neq 0$ mit*

$$|\eta^{(\lambda)}| < 1 \qquad (\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q),$$

$$|\eta^{(\mu)}| > 1 \qquad (\mu = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varkappa),$$

wo die $q + \varkappa = r_1 + r_2$ natürlichen, von einander verschiedenen Zahlen

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_q,\quad \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_\varkappa$$

zusammen die endliche Zahlmenge

$$1,\ 2,\ \ldots,\ r_1 + r_2$$

bilden und $\varkappa \geq 1$ ist. Dann gibt es drei positive Zahlen C_1, C_2, C_3, die allein vom Ring J und der Zahl η abhängen, mit der folgenden Eigenschaft: Wird für alle β aus J

$$\Phi(\beta) = \max_{\lambda=\lambda_1,\,\lambda_2,\,\ldots,\,\lambda_q} \Omega^{(\lambda)}(\beta) \quad \textit{und} \quad \Psi(\beta) = \max_{\mu=\mu_1,\,\mu_2,\,\ldots,\,\mu_\varkappa} \Omega^{(\mu)}(\beta)$$

gesetzt, so gibt es zu jeder Zahl α aus J mit $\Psi(\alpha) > C_2$ endlichviele natürliche Zahlen g, g_1, ..., g_{f-1} mit

$$g > g_1 > \cdots > g_{f-1} \geq 1,$$

ebensoviele Zahlen γ, γ_1, ..., γ_{f-1} aus J mit

$$\Phi(\gamma_i) \leq C_1, \quad \Psi(\gamma_i) \leq C_1 + C_2 \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ f-1),$$

und schliesslich noch eine Zahl α_f aus J mit

$$\Omega^{(\lambda)}(\alpha_f) \leq C_3 \max\left(\Omega^{(\lambda)}(\alpha),\ 1\right) \text{ für } \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q, \quad \Psi(\alpha_f) \leq C_2,$$

so dass für α die Darstellung

$$\alpha = \gamma\,\eta^{g} + \gamma_1\,\eta^{g_1} + \cdots + \gamma_{f-1}\,\eta^{g_{f-1}} + \alpha_f$$

besteht.

11. Von jetzt ab sei $W(\alpha)$ eine willkürliche Pseudobewertung von J; es soll versucht werden, das in § 8 gestellte Problem für dieselbe zu lösen. Dabei schliessen wir jedoch den uninteressanten Fall aus, dass $W(\alpha)$ für kein $\alpha \neq 0$ aus J kleiner als Eins wird, dass also

$$W(\alpha) \begin{cases} = 0 & \text{für } \alpha = 0, \\ \geq 1 & \text{für } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

ist; denn alsdann ist die Pseudobewertung $W(\alpha)$ offenbar äquivalent zur trivialen Pseudobewertung $W_0(\alpha)$.

Es gibt also eine Zahl $\alpha \neq 0$ aus J mit

$$W(\alpha) < 1.$$

Die Norm dieser Zahl ist gleich

$$\mp \prod_{h=1}^{r_1} \Omega^{(h)}(\alpha)^{d_h} \qquad \begin{pmatrix} d_h = 1 \text{ für } 1 \leq h \leq r_1, \\ d_h = 2 \text{ für } r_1 + 1 \leq h \leq r_1 + r_2 \end{pmatrix}$$

und natürlich mindestens vom Absolutbetrag 1. Ihre einzelnen Faktoren können bekanntlich allein dann den sämtlichen Ungleichungen

$$\Omega^{(h)}(\alpha) \leq 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2)$$

genügen, wenn α eine Einheitswurzel ist. Es gibt in diesem Fall eine natürliche Zahl a, so dass

$$\alpha^a = 1 \quad \text{und folglich} \quad W(1) \leq W(\alpha)^a < 1$$

ist; das aber ist allein dann möglich, wenn $W(\alpha)$ gleich der uneigentlichen Pseudobewertung $U(\alpha)$ ist. Auch diesen Ausnahmefall wollen wir im folgenden ausschliessen.

12. Es gibt somit zu $W(\alpha)$ Zahlen $\alpha \neq 0$ mit

$$W(\alpha) < 1,$$

und jede solche Zahl befriedigt ferner mindestens eine der $r_1 + r_2$ Ungleichungen

$$\Omega^{(h)}(\alpha) > 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2).$$

Definition 1: *Die Absolutbetragbewertung $\Omega^{(h)}(\alpha)$ von J heisse in der Pseudobewertung $W(\alpha)$ enthalten, wenn keine Zahl α in J mit*

$$\alpha \neq 0, \quad \Omega^{(h)}(\alpha) \geq 1, \quad W(\alpha) < 1$$

existiert; gibt es dagegen mindestens eine solche Zahl, so heisse $\Omega^{(h)}(\alpha)$ nicht in $W(\alpha)$ enthalten.

(Im ersten Teil dieser Arbeit hatten wir einen anderen Begriff des Enthaltenseins eingeführt, den man vorläufig nicht mit dem vorigen Begriff verwechseln darf; später wird sich die Übereinstimmung der beiden herausstellen.)

Aus der vorigen Bemerkung geht hervor, dass *nicht alle* Bewertungen

$$\Omega^{(h)}(\alpha) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r_1 + r_2)$$

in $W(\alpha)$ enthalten sind. Wir wollen mit

$$\Omega^{(l_1)}(\alpha), \ \Omega^{(l_2)}(\alpha), \ \ldots, \ \Omega^{(l_s)}(\alpha)$$

die sämtlichen in $W(\alpha)$ enthaltenen und mit

$$\Omega^{(m_1)}(\alpha),\ \Omega^{(m_2)}(\alpha),\ \ldots,\ \Omega^{(m_\sigma)}(\alpha)$$

die sämtlichen *nicht* in $W(\alpha)$ enthaltenen Absolutbetragbewertungen bezeichnen; dabei ist natürlich

$$s+\sigma=r_1+r_2,\quad 0\leq s\leq r_1+r_2-1,\quad 1\leq\sigma\leq r_1+r_2,$$

und die Zahlen

$$l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_s,\quad m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_\sigma$$

bilden zusammen die Zahlfolge

$$1,\ 2,\ \ldots,\ r_1+r_2.$$

Zu jedem der Indizes $m=m_1,\ m_2, \ldots,\ m_\sigma$ (aber natürlich zu keinem der Indizes $l=l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_s$) existiert nach Definition 1 eine Zahl ξ_m aus J mit

$$\xi_m\neq 0,\quad \Omega^{(m)}(\xi_m)\geq 1,\quad W(\xi_m)<1.$$

Wegen

$$\Omega^{(m)}(2\,\xi_m^k)=2\,\Omega^{(m)}(\xi_m)^k,\quad W(2\,\xi_m^k)\leq 2\,W(\xi_m)^k$$

genügt somit für genügend grosses natürliches k die Zahl

$$\eta_m=2\,\xi_m^k$$

den schärferen Ungleichungen

$$\eta_m\neq 0,\quad \Omega^{(m)}(\eta_m)>1,\quad W(\eta_m)<1,$$

und überdies sind ihre sämtlichen Absolutbeträge

$$\Omega^{(h)}(\eta_m)\qquad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ r_1+r_2)$$

entweder grösser als Eins oder kleiner als Eins, jedenfalls aber alle von Eins verschieden.

13. Sei wieder $\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n$ eine Basis von J, so dass also jede Zahl α aus diesem Ring in der Form

$$\alpha=a_1\,\omega_1+a_2\,\omega_2+\cdots+a_n\,\omega_n$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ dargestellt werden kann. Weil für jede ganze rationale Zahl a und für jedes ω aus J

$$W(a\,\omega) \leq |a|\; W(\omega)$$

ist, so folgt hieraus die Ungleichung

$$W(\alpha) \leq \{W(\omega_1) + W(\omega_2) + \cdots + W(\omega_n)\} \max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|).$$

Den linearen Gleichungen

$$a_1\,\omega_1^{(h)} + a_2\,\omega_2^{(h)} + \cdots + a_n\,\omega_n^{(h)} = \alpha^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

für die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entnimmt man aber leicht die Abschätzung

$$\max(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|) \leq c_2 \max_{h=1,2,\ldots,r_1+r_2} \Omega^{(h)}(\alpha),$$

wo c_2 eine allein von der gewählten Basis und von der Pseudobewertung $W(\alpha)$ abhängige positive Konstante bezeichnet; verstehen wir unter c_3 eine zweite positive Zahl derselben Art, so ergibt sich somit für alle Zahlen α aus J die Ungleichung

(3): $$W(\alpha) \leq c_3 \max_{h=1,2,\ldots,r_1+r_2} \Omega^{(h)}(\alpha).$$

Es ist wesentlich für die weiteren Überlegungen, dass diese Ungleichung (3) sich verschärfen lässt zu folgendem Satz:

Satz 2: *Zu jeder Pseudobewertung $W(\alpha)$ von J, die weder zur trivialen, noch zur uneigentlichen Pseudobewertung äquivalent ist, gibt es eine positive Konstante c_4 mit der folgenden Eigenschaft: Sind*

$$\Omega^{(l_1)}(\alpha),\; \Omega^{(l_2)}(\alpha),\; \ldots,\; \Omega^{(l_s)}(\alpha)$$

die sämtlichen in $W(\alpha)$ enthaltenen Absolutbetragbewertungen von J, so ist für jede Zahl α aus J

$$W(\alpha) \leq c_4 \max\left(\Omega^{(l_1)}(\alpha),\; \Omega^{(l_2)}(\alpha),\; \ldots,\; \Omega^{(l_s)}(\alpha),\; 1\right).$$

Im Fall $s = 0$ ist das Maximum-Zeichen dabei durch 1 zu ersetzen.

14. Beweis von Satz 2: Sei für $\tau = 0, 1, 2, \ldots, \sigma$

$$X_\tau(\alpha) = \max\left(\Omega^{(l_1)}(\alpha), \ldots, \Omega^{(l_s)}(\alpha),\; \Omega^{(m_1)}(\alpha), \ldots, \Omega^{(m_\tau)}(\alpha)\right)$$

also speziell $X_0(\alpha) = \max\left(\Omega^{(l_1)}(\alpha), \ldots, \Omega^{(l_s)}(\alpha)\right)$. Wir nehmen an, es sei bereits gezeigt, dass für einen Index $\tau \geq 1$ eine Zahl $C(\tau) > 0$ existiert, so dass für alle α aus J

(4): $$W(\alpha) \leq C(\tau) \max (X_\tau(\alpha), 1)$$

ist (für $\tau = \sigma$ trifft dies mit $C(\sigma) = c_3$ wegen (3) zu). Alsdann werden wir mittels Hilfssatz a aus § 10 beweisen, dass auch eine analoge Ungleichung mit $\tau - 1$ statt τ und einer Konstanten $C(\tau - 1) > 0$ statt $C(\tau)$ für alle α aus J gilt; durch vollständige Induktion folgt hieraus Satz 2.

In Hilfssatz a werde $\eta = \eta_{m_\tau}$ gesetzt, wo η_{m_τ} die in § 12 definierte Zahl bedeutet. Dann ist etwa

$$|\eta^{(\lambda)}| < 1 \qquad (\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q),$$

$$|\eta^{(\mu)}| > 1 \qquad (\mu = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varkappa),$$

und zwar kommt m_τ unter den Indizes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\varkappa$ vor. Unter $\Phi(\alpha)$ und $\Psi(\alpha)$ mögen die Funktionen, unter C_1, C_2, C_3 die Konstanten aus § 10 verstanden werden.

Sei nun α eine beliebige Zahl aus J. Genügt diese der Ungleichung

$$\Psi(\alpha) \leq C_2,$$

so ist auf Grund von (4) offenbar

(A): $$W(\alpha) \leq C(\tau) \max \left(X_{\tau-1}(\alpha), C_2, 1\right).$$

Sei daher von nun ab

$$\Psi(\alpha) > C_2$$

und

$$\alpha = \gamma \eta^g + \gamma_1 \eta^{g_1} + \cdots + \gamma_{f-1} \eta^{g_{f-1}} + \alpha_f$$

die nach dem Hilfssatz mögliche Reihenentwicklung nach Potenzen von η. Da die Koeffizienten γ_i den Ungleichungen

$$\Phi(\gamma_i) \leq C_1, \quad \Psi(\gamma_i) \leq C_1 + C_2 \qquad (i = 0, 1, \ldots, f-1)$$

genügen, so wird für sie nach (3)

$$W(\gamma_i) \leq c_3 (C_1 + C_2) \qquad (i = 0, 1, \ldots, f-1).$$

Weil ferner

$$\Omega^{(\lambda)}(\alpha_f) \leq C_3 \max (\Omega^{(\lambda)}(\alpha), 1) \text{ für } \lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q; \quad \Psi(\alpha_f) \leq C_2$$

ist, so ergibt sich nach (4) wegen $C_3 > 1$

$$W(\alpha_f) \leq C(\tau) \max \left(C_3 X_{\tau-1}(\alpha), C_2, C_3\right).$$

Setzen wir

$$W(\eta) = \Lambda,$$

so dass also $\Delta < 1$ ist, so wird demnach

$$W(\alpha) \leq \sum_{i=0}^{f-1} W(\gamma_i)\, W(\eta)^{g_i} + W(\alpha_f) \leq \sum_{j=0}^{\infty} c_3 (C_1 + C_2) \Delta^j + C(\tau) \max \Big(C_3\, X_{\tau-1}(\alpha),\, C_2,\, C_3\Big)$$

und also

(B): $$W(\alpha) \leq \frac{c_3(C_1 + C_2)}{1 - \Delta} + C(\tau) \max \Big(C_3\, X_{\tau-1}(\alpha),\, C_2,\, C_3\Big).$$

Versteht man jetzt unter $C(\tau - 1)$ die Zahl

$$C(\tau - 1) = \left\{\frac{c_3(C_1 + C_2)}{1 - \Delta} + C(\tau)\right\} \max (C_2,\, C_8),$$

so folgt aus (A) und (B) gerade die zu beweisende Ungleichung

$$W(\alpha) \leq C(\tau - 1) \max (X_{\tau-1}(\alpha),\, 1)$$

und damit die Behauptung.

15. Aus Satz 2 lässt sich die folgende merkwürdige Aussage ableiten:

a: *Es gibt eine nichtverschwindende Zahl* γ *aus* J *mit*

$$W(\gamma) < 1, \qquad \begin{array}{ll} \Omega^{(l)}(\gamma) < 1 & (l = l_1, l_2, \ldots, l_s), \\ \Omega^{(m)}(\gamma) > 1 & (m = m_1, m_2, \ldots, m_\sigma). \end{array}$$

Zum Beweis sei $\alpha \neq 0$ eine Zahl aus J mit $W(\alpha) < 1$, und k eine so grosse natürliche Zahl, dass

$$W(\alpha^k) < \frac{1}{c_4}$$

ist. Offenbar gibt es eine Zahl β aus J mit

$$\Omega^{(l)}(\beta) \leq 1 \quad (l = l_1, l_2, \ldots, l_s); \qquad \Omega^{(m)}(\beta) > \frac{1}{\Omega^{(m)}(\alpha^k)} \quad (m = m_1, m_2, \ldots, m_\sigma).$$

Setzen wir nun

$$\gamma = \alpha^k \beta,$$

so wird gerade

$$W(\gamma) \leq W(\alpha^k)\, W(\beta) < \frac{1}{c_4} \cdot c_4 = 1; \qquad \Omega^{(m)}(\gamma) > 1; \qquad \Omega^{(l)}(\gamma) \leq \Omega^{(l)}(\alpha)^k < 1,$$

wie behauptet wurde.

III.

16. In Satz 2 wird $W(\alpha)$ mit der Pseudobewertung

$$\Omega(\alpha) = \max\left(\Omega^{(l_1)}(\alpha),\ \Omega^{(l_2)}(\alpha), \ldots,\ \Omega^{(l_s)}(\alpha)\right)$$

von J verglichen; das Ergebnis

$$W(\alpha) \leq c_4 \max(\Omega(\alpha),\ 1)$$

zeigt, dass $W(\alpha)$ allein dann gross sein kann, wenn auch $\Omega(\alpha)$ gross ist, und dass insbesondere für alle Zahlen α aus J mit $\Omega(\alpha) \leq 1$ stets $W(\alpha) \leq c_4$ ist. (Für $s = 0$ ist unter $\Omega(\alpha)$ die uneigentliche Pseudobewertung $U(\alpha)$ zu verstehen; in diesem Fall bleibt also $W(\alpha)$ für alle α aus J beschränkt.)

Für die weiteren Untersuchungen ist wichtig, dass es Einheiten η in J mit $\Omega(\eta) \leq 1$ gibt, und dass sogar der folgende schärfere Satz gilt:

a: *Falls J nicht der Ring aller ganzen rationalen Zahlen oder der Ring aller ganzen Zahlen eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers ist, so gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine Einheit η aus J mit*

$$\Omega(\eta) \leq \varepsilon.$$

Auf einen Beweis dieses Satzes kann verzichtet werden, da er wohlbekannt ist; man zeigt ihn beim Beweis des DIRICHLETschen Einheitensatzes, entweder mittels des Schubfachschlusses oder mittels des MINKOWSKIschen Linearformensatzes, um aus ihm alsdann die Existenz eines unabhängiges Systems von Einheiten herzuleiten. — Satz a bleibt für $s = 0$ natürlich auch richtig, ist dann aber ohne Inhalt.

17. Wir definieren:

Definition 2: *Eine Zahl $\gamma \neq 0$ aus J heisse W-Zahl, wenn es zu ihr eine zweite Zahl $\delta \neq 0$ aus J gibt, so dass*

$$\lim_{j \to \infty} W(\gamma^j \delta) = 0$$

ist.

Es gibt natürlich W-Zahlen; denn nach Voraussetzung existieren sogar Zahlen $\alpha \neq 0$ aus J mit $W(\alpha) < 1$, also mit

$$\lim_{j \to \infty} W(\alpha^j \cdot 1) = 0.$$

Die W-Zahlen zeichnen sich durch einige Eigenschaften aus, und von diesen Eigenschaften wird im folgenden Gebrauch gemacht.

a: *Jede W-Zahl γ genügt der Ungleichung*

$$\Omega(\gamma) < 1.$$

Beweis: Nach Definition 2 gibt es zu γ eine Zahl $\delta \neq 0$ aus J, so dass

$$\lim_{j \to \infty} W(\gamma^j \delta) = 0$$

und folglich auch für jede natürliche Zahl d

$$\lim_{j \to \infty} W(\gamma^j \cdot d\delta) = 0$$

ist. Da die Absolutbeträge aller Konjugierten von δ positiv sind, so lässt sich d so gross wählen, dass gleichzeitig

$$\Omega^{(l)}(d\delta) \geq 1 \qquad (l = l_1, l_2, \ldots, l_s)$$

ist. Weiter existiert nach der letzten Limesgleichung eine natürliche Zahl j, die der Ungleichung

$$W(\gamma^j \cdot d\delta) < 1$$

genügt. Nach Definition 1 und nach der Voraussetzung über die in W enthaltenen Absolutbetragbewertungen muss folglich

$$\Omega^{(l)}(\gamma^j \cdot d\delta) < 1 \qquad (l = l_1, l_2, \ldots, l_s)$$

und also wirklich

$$\Omega^{(l)}(\gamma) < 1 \qquad (l = l_1, l_2, \ldots, l_s)$$

sein, w. z. b. w.

b: *Ist γ eine W-Zahl, $\gamma^* \neq 0$ durch γ teilbar und*

$$\Omega(\gamma^*) < 1,$$

so ist auch γ^* eine W-Zahl.

Beweis: Wir verstehen unter β die Zahl aus J mit

$$\gamma^* = \beta\gamma$$

und ferner unter $\delta \neq 0$ eine solche Zahl aus J, dass

$$\lim_{j \to \infty} W(\gamma^j \delta) = 0$$

ist. Wegen der Voraussetzungen über γ^* lässt sich eine natürliche Zahl f finden, so dass die s Ungleichungen

$$\Omega^{(l)}(\gamma^{*f}) \leq \Omega^{(l)}(\gamma) \qquad (l = l_1, l_2, \ldots, l_s)$$

erfüllt sind. Wegen

$$\gamma^{*f} = \gamma \cdot \beta^f \gamma^{f-1}$$

müssen somit auch die Ungleichungen

$$\Omega^{(l)}(\beta^f \gamma^{f-1}) \leq 1 \qquad (l = l_1, l_2, \ldots, l_s)$$

gelten, so dass nach Satz 2 für jede natürliche Zahl j_1

$$W((\beta^f \gamma^{f-1})^{j_1}) \leq c_4$$

ist. Sei jetzt $j \geq f + 1$ eine natürliche Zahl und

$$j = f j_1 + j_2 \qquad (0 \leq j_2 \leq f - 1)$$

ihre Zerlegung bei der Division durch f; man hat dann

$$\gamma^{*j} \delta = \gamma^{j_1} \delta \cdot \gamma^{*j_2} \cdot (\beta^f \gamma^{f-1})^{j_1},$$

also

$$W(\gamma^{*j} \delta) \leq W(\gamma^{j_1} \delta)\; W(\gamma^{*j_2})\; W((\beta^f \gamma^{f-1})^{j_1}),$$

und da von den Faktoren der rechten Seite für über alle Grenzen wachsendes j, d. h. für $j_1 \to \infty$, der erste nach Voraussetzung gegen Null strebt, der zweite evidenterweise beschränkt bleibt, da γ^{*j_2} nur endlichviele Möglichkeiten hat, und der dritte nach vorhin kleiner als c_4 ist, so folgt

$$\lim_{j \to \infty} W(\gamma^{*j} \delta) = 0$$

und also die Behauptung.

c: *Sind γ_1 und γ_2 zwei verschiedene W-Zahlen, und ist $\gamma^* \neq 0$ ein Vielfaches von $\gamma_1 - \gamma_2$, das der Ungleichung*

$$\Omega(\gamma^*) < 1$$

genügt, so stellt auch γ^* eine W-Zahl dar.

Beweis: Sei η eine Einheit aus J mit

$$\Omega(\eta) \leq \frac{1}{2};$$

eine solche Einheit gibt es gewiss nach § 16, Hilfssatz a. Seien weiter $\delta_1 \neq 0$ und $\delta_2 \neq 0$ zwei Zahlen aus J mit

$$\lim_{j \to \infty} W(\gamma_1^j \delta_1) = 0, \qquad \lim_{j \to \infty} W(\gamma_2^j \delta_2) = 0.$$

Da γ_1 und γ_2 W-Zahlen sind, so gilt nach Hilfssatz a

$$\Omega(\gamma_1) < 1, \qquad \Omega(\gamma_2) < 1;$$

die Zahl

$$\Omega(\gamma_1^{g_1} \gamma_2^{g_2})$$

strebt also gegen Null, wenn (g_1, g_2) eine Folge von Paaren nichtnegativer ganzer rationaler Zahlen mit $g_1 + g_2 \to \infty$ durchläuft. Wächst daher die natürliche Zahl j über alle Grenzen und ist $j_0 = \left[\frac{j}{2}\right]$, so dass auch j_0 gegen Unendlich strebt, so genügen die beiden Zahlen

$$\Gamma_j^{(1)} = \delta_2 \eta^j \sum_{\iota=0}^{j_0} \binom{j}{\iota} (-1)^\iota \gamma_1^{j_0-\iota} \gamma_2^\iota \quad \text{und} \quad \Gamma_j^{(2)} = \delta_1 \eta^j \sum_{\iota=j_0+1}^{j} \binom{j}{\iota} (-1)^\iota \gamma_1^{j-\iota} \gamma_2^{\iota-j_0-1}$$

wegen $\sum_{\iota=0}^{j} \binom{j}{\iota} = 2^j$ den Limesgleichungen

$$\lim_{j \to \infty} \Omega(\Gamma_j^{(1)}) = 0, \qquad \lim_{j \to \infty} \Omega(\Gamma_j^{(2)}) = 0,$$

und folglich ist erst recht nach Satz 2

$$W(\Gamma_j^{(1)}) \leq c_4, \qquad W(\Gamma_j^{(2)}) \leq c_4 \qquad \text{für grosses } j.$$

Aus der Identität

$$\big((\gamma_1 - \gamma_2)\eta\big)^j \delta_1 \delta_2 = \Gamma_j^{(1)} \cdot \gamma_1^{j-j_0} \delta_1 + \Gamma_j^{(2)} \cdot \gamma_2^{j_0+1} \delta_2$$

folgt daher sogleich

$$0 \leq \lim_{j \to \infty} W\Big(\{(\gamma_1 - \gamma_2)\eta\}^j \delta_1 \delta_2\Big) \leq c_4 \lim_{j \to \infty} W(\gamma_1^{j-j_0} \delta_1) + c_4 \lim_{j \to \infty} W(\gamma_2^{j_0+1} \delta_2) = 0,$$

und also ist $(\gamma_1 - \gamma_2)\eta$ eine W-Zahl. Jedes Vielfache von $\gamma_1 - \gamma_2$ ist aber auch durch $(\gamma_1 - \gamma_2)\eta$ teilbar; wegen Hilfssatz b folgt daher die Behauptung.

18. Sei nunmehr $\mathfrak{c}$ die Menge, die aus der Zahl 0 und weiter aus allen denjenigen Zahlen $\gamma \neq 0$ aus J besteht, zu denen es eine Einheit η aus J gibt, so dass $\gamma\eta$ eine W-Zahl ist. Da W-Zahlen existieren, so besteht $\mathfrak{c}$ nicht allein aus der Null.

Die Bedeutung von $\mathfrak{c}$ geht hervor aus den folgenden zwei Sätzen:

a: *Ist γ ein Element aus $\mathfrak{c}$ und γ^* durch γ teilbar, so gehört auch γ^* zu der Menge $\mathfrak{c}$.*

Beweis: Für $\gamma = 0$ oder $\gamma^* = 0$ ist die Behauptung klar; sei also $\gamma \neq 0$ und $\gamma^* \neq 0$ und etwa $\gamma^* = \beta\gamma$, wo β eine Zahl aus J bezeichnet. Es gibt eine Einheit η, so dass $\gamma\eta$ W-Zahl ist, ferner nach § 16, Hilfssatz a eine Einheit η^* mit

$$\Omega(\gamma^*)\,\Omega(\eta^*) < 1, \qquad \text{also} \qquad \Omega(\gamma^*\eta^*) < 1.$$

Da

$$\gamma^*\eta^* = \gamma\eta\,(\beta\eta^{-1}\eta^*)$$

durch die W-Zahl $\gamma\eta$ teilbar ist, so folgt aus Hilfssatz b des vorigen Paragraphen, dass auch $\gamma^*\eta^*$ eine W-Zahl und folglich γ^* ein Element von $\mathfrak{c}$ darstellt, w. z. b. w.

b: *Sind γ_1 und γ_2 zwei Elemente von $\mathfrak{c}$, so gehört auch $\gamma_1 - \gamma_2$ zu $\mathfrak{c}$.*

Beweis: Die Behauptung ist klar für $\gamma_1 = \gamma_2$ und für $\gamma_1 = 0$ oder $\gamma_2 = 0$; sei daher ohne Einschränkung $\gamma_1 \neq \gamma_2$, $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$. Es gibt zwei Einheiten η_1 und η_2 aus J, so dass $\gamma_1\eta_1$ und $\gamma_2\eta_2$ W-Zahlen sind, ferner nach dem schon mehrfach benutzten Hilfssatz eine Einheit η aus J mit

$$\Omega(\eta) < \min\left(\frac{1}{\Omega(\gamma_1)},\ \frac{1}{\Omega(\gamma_2)},\ \frac{1}{\Omega(\gamma_1 - \gamma_2)}\right)$$

und also mit

$$\Omega(\gamma_1\eta) < 1, \qquad \Omega(\gamma_2\eta) < 1, \qquad \Omega((\gamma_1 - \gamma_2)\eta) < 1.$$

Da nun ausserdem $\gamma_1\eta$, bzw. $\gamma_2\eta$ Vielfache von $\gamma_1\eta_1$, bzw. $\gamma_2\eta_2$ sind, so müssen sie nach Hilfssatz b des vorigen Paragraphen W-Zahlen sein, und da weiter $(\gamma_1 - \gamma_2)\eta = \gamma_1\eta - \gamma_2\eta$ die Differenz zweier W-Zahlen darstellt und

$$\Omega((\gamma_1 - \gamma_2)\eta) < 1$$

ist, so folgt aus Hilfssatz c des vorigen Paragraphen, dass $(\gamma_1 - \gamma_2)\eta \neq 0$ ebenfalls eine W-Zahl definiert, und also gehört $\gamma_1 - \gamma_2$ in der Tat zu $\mathfrak{c}$, w. z. b. w.

Aus den vorigen zwei Hilfssätzen geht hervor, dass $\mathfrak{c}$ ein Ideal von J bildet, und zwar ist dieses Ideal natürlich vom Nullideal (0) verschieden, da $\mathfrak{c}$, wie wir sahen, mindestens ein von Null verschiedenes Element besitzt. Dagegen ist aber selbstverständlich nicht ausgeschlossen, dass $\mathfrak{c}$ gleich dem Ideal $\mathfrak{o}$ aller Elemente aus J ist; dieser Fall liegt z. B. bei der Pseudobewertung $\Omega(\alpha)$ vor.

Definition 3: *Das Ideal* $\mathfrak{c}$, *das aus der Zahl* 0 *und weiter aus allen denjenigen Zahlen* $\gamma \neq 0$ *aus* J *besteht, zu denen es eine Einheit* η *von* J *gibt, so dass* $\gamma \eta$ *W-Zahl ist, heisse der* Hauptcharakter *von* $W(\alpha)$.

Gemäss dieser Definition lässt sich jetzt der folgende Satz aussprechen:

Satz 3: *Eine Zahl* γ *aus* J *ist dann und nur dann eine W-Zahl, wenn sie den drei Bedingungen*

$$\gamma \neq 0, \qquad \Omega(\gamma) < 1, \qquad \gamma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{c}}$$

genügt.

Beweis: Dass die vorigen Forderungen notwendig sind, ergibt sich so: Für jede W-Zahl γ ist nach Definition 2 die Ungleichung $\gamma \neq 0$ erfüllt; da weiter $\gamma = \gamma \cdot 1$ geschrieben werden kann, so gehört γ nach Definition 3 zu $\mathfrak{c}$, und schliesslich muss nach § 17, Hilfssatz a auch $\Omega(\gamma) < 1$ sein. — Die drei Bedingungen

$$\gamma \neq 0, \qquad \Omega(\gamma) < 1, \qquad \gamma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{c}}$$

reichen auch aus, damit γ eine W-Zahl ist. Denn da $\gamma \neq 0$ zu $\mathfrak{c}$ gehört, so gibt es nach Definition 3 eine Einheit η aus J, so dass $\gamma \eta$ eine W-Zahl darstellt; alsdann ist aber γ durch diese W-Zahl $\gamma \eta$ teilbar und $\Omega(\gamma) < 1$, und folglich γ nach § 17, Hilfssatz b selbst eine W-Zahl, w. z. b. w.

Satz 4: *Der Hauptcharakter* $\mathfrak{c}$ *von* $W(\alpha)$ *ist quadratfrei*, d. h. durch das Quadrat keines Primideals $\mathfrak{p}$ von J teilbar.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass, wenn γ eine W-Zahl mit

$$\gamma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$$

ist, wo $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal von J bedeutet, stets auch eine W-Zahl γ^* mit

$$\gamma^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}, \quad \text{aber} \quad \gamma^* \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}^2}$$

existiert; daraus folgt die Behauptung ohne weiteres.

Um diesen Nachweis zu erbringen, sei $\mathfrak{p}^g$ die höchste Potenz von $\mathfrak{p}$, die in γ aufgeht; dabei ist $g \geq 2$; ferner sei

$$(\gamma) = \mathfrak{p}^g \mathfrak{q},$$

so dass also $\mathfrak{q}$ zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd ist. Bekanntlich existiert eine Zahl $\gamma_1 \neq 0$ aus J, die durch $\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, nicht aber durch $\mathfrak{p}^2\mathfrak{q}$ teilbar ist; sei

$$(\gamma_1) = \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{r},$$

wo jetzt das Ideal $\mathfrak{r}$ ebenfalls zu $\mathfrak{p}$ teilerfremd ist. Dann wird

$$(\gamma_1^g) = \mathfrak{p}^g\,\mathfrak{q}\cdot\mathfrak{q}^{g-1}\,\mathfrak{r}^g \qquad \text{und also} \qquad \gamma_1^g = \gamma\cdot\beta \qquad (\beta \neq 0)$$

mit einer gewissen Zahl β aus J, für die $(\beta) = \mathfrak{q}^{g-1}\,\mathfrak{r}^g$ ist. Bedeute jetzt η eine Einheit aus J mit

$$\Omega(\eta) \leq \Omega(\beta)^{-\frac{1}{g}}, \qquad \text{also} \qquad \Omega(\beta\,\eta^g) \leq 1,$$

und sei $\gamma^* = \gamma_1\eta$. Dann ist $\gamma^{*g} = \beta^*\gamma$ mit $\beta^* = \beta\eta^g$ und $\Omega(\beta^*) \leq 1$.

Verstehen wir nun unter $\delta \neq 0$ eine Zahl aus J mit

$$\lim_{j\to\infty} W(\gamma^j\,\delta) = 0,$$

so wird wegen

$$\gamma^{*j}\,\delta = \gamma^{\left[\frac{j}{g}\right]}\delta\cdot\gamma^{*\,j-\left[\frac{j}{g}\right]g}\cdot\beta^{*\left[\frac{j}{g}\right]}, \qquad W(\gamma^{*j}\,\delta) \leq W(\gamma^{\left[\frac{j}{g}\right]}\delta)\,W(\gamma^{*\,j-\left[\frac{j}{g}\right]g})\,W(\beta^{*\left[\frac{j}{g}\right]})$$

auch

$$\lim_{j\to\infty} W(\gamma^{*j}\,\delta) = 0,$$

da die Zahlen $W(\gamma^{\left[\frac{j}{g}\right]}\delta)$ mit wachsendem j gegen Null streben, die Zahlen $W(\gamma^{*\,j-\left[\frac{j}{g}\right]g})$ trivialerweise beschränkt bleiben, und die Zahlen $W(\beta^{*\left[\frac{j}{g}\right]})$ wegen $\Omega(\beta^{*\left[\frac{j}{g}\right]}) \leq 1$ nach Satz 2 der Ungleichung

$$W(\beta^{*\left[\frac{j}{g}\right]}) \leq c_1$$

genügen; daraus folgt die Behauptung.

19. **Definition 4:** *Eine Zahl $\delta \neq 0$ aus J heisse w-Zahl, wenn sie für jede W-Zahl γ die Limesgleichung*

$$\lim_{j\to\infty} W(\gamma^j\,\delta) = 0$$

erfüllt.

Aus dieser Definition folgt sehr leicht, dass mit δ auch jedes Vielfache $\delta^* \neq 0$ hiervon eine w-Zahl ist, und dass ferner, falls δ_1 und δ_2 zwei verschiedene w-Zahlen sind, auch ihre Differenz $\delta_1 - \delta_2$ eine w-Zahl darstellt. Zusammen mit der Zahl 0 bilden also die sämtlichen w-Zahlen ein gewisses Ideal $\mathfrak{d}$ von J.

Definition 5: *Das Ideal* $\mathfrak{d}$, *das aus allen* w-*Zahlen und ausserdem aus der Zahl* 0 *besteht, heisse der* Nebencharakter *der Pseudobewertung* $W(\alpha)$.

Auch dieser Nebencharakter besitzt einige bemerkenswerte Eigenschaften:

a: *Der Nebencharakter* $\mathfrak{d}$ *ist vom Nullideal* (0) *verschieden.*

Beweis: Bekanntlich gibt es zwei Elemente $\gamma_1 \neq 0$ und $\gamma_2 \neq 0$ aus $\mathfrak{c}$, so dass jedes Element γ dieses Ideals in der Form

$$\gamma = \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2$$

mit Zahlen β_1 und β_2 aus J geschrieben werden kann. Da eine solche Darstellung bestehen bleibt, wenn γ_1 und γ_2 mit beliebigen Einheiten multipliziert werden, so dürfen γ_1 und γ_2 ohne Einschränkung der Allgemeinheit als W-Zahlen vorausgesetzt werden; es gibt also zwei Zahlen $\delta_1 \neq 0$ und $\delta_2 \neq 0$ aus J mit

$$\lim_{j \to \infty} W(\gamma_1^j \delta_1) = 0, \qquad \lim_{j \to \infty} W(\gamma_2^j \delta_2) = 0.$$

Wir werden zeigen, dass $\delta = \delta_1 \delta_2$ in $\mathfrak{d}$ liegt, dass also für jede W-Zahl γ

$$\lim_{j \to \infty} W(\gamma^j \delta) = 0$$

ist.

Nach vorhin besteht die Darstellung

$$\gamma = \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2$$

mit zwei gewissen Zahlen β_1 und β_2 aus J. Sei g eine so grosse natürliche Zahl, dass $\beta_1^* = \beta_1 \gamma^{g-1}$ und $\beta_2^* = \beta_2 \gamma^{g-1}$ den Ungleichungen

$$\Omega(\beta_1^*) \leq \frac{1}{2}, \qquad \Omega(\beta_2^*) \leq \frac{1}{2}$$

genügen; wegen $\Omega(\gamma) < 1$ gibt es ein solches g. Alsdann ist

$$\gamma^g = \beta_1^* \gamma_1 + \beta_2^* \gamma_2.$$

Wird die beliebige natürliche Zahl $j \geq 2g + 1$ durch Division mit $2g$ auf die Gestalt

$$j = 2gj_0 + j_1 \qquad (0 \leq j_1 \leq 2g - 1)$$

mit natürlichen Zahlen j_0 und j_1 gebracht, so ist

$$\gamma^j \delta = \gamma^{j_1} (\beta_1^* \gamma_1 + \beta_2^* \gamma_2)^{2j_0} \delta_1 \delta_2 \qquad \text{und also} \qquad \gamma^j \delta = B_j^{(1)} \cdot \gamma_1^{j_0} \delta_1 + B_j^{(2)} \cdot \gamma_2^{j_0} \delta_2,$$

wenn zur Abkürzung

$$B_j^{(1)} = \gamma^{j_1}\,\delta_2 \sum_{\iota=0}^{j_0} \binom{2\,j_0}{\iota} \beta_1^{*\,2\,j_0-\iota}\,\beta_2^{*\,\iota}\,\gamma_1^{j_0-\iota}\,\gamma_2^{\iota}, \qquad B_j^{(2)} = \gamma^{j_1}\,\delta_1 \sum_{\iota=j_0+1}^{2\,j_0} \binom{2\,j_0}{\iota} \beta_1^{*\,2\,j_0-\iota}\,\beta_2^{*\,\iota}\,\gamma_1^{2\,j_0-1}\,\gamma_2^{\iota-j_0}$$

gesetzt wird. Wegen

$$\sum_{\iota=0}^{2\,j_0} \binom{2\,j_0}{\iota} = 2^{2\,j_0}, \quad \Omega(\beta_1^*) \leq \frac{1}{2}, \quad \Omega(\beta_2^*) \leq \frac{1}{2}, \quad \Omega(\gamma_1) < 1, \quad \Omega(\gamma_2) < 1$$

folgt hieraus leicht

$$\lim_{j\to\infty} \Omega(B_j^{(1)}) = 0, \qquad \lim_{j\to\infty} \Omega(B_j^{(2)}) = 0;$$

nach Satz 2 ist demnach für genügend grosses j

$$W(B_j^{(1)}) \leq c_4, \qquad W(B_j^{(2)}) \leq c_4$$

und folglich

$$0 \leq \lim_{j\to\infty} W(\gamma^j\,\delta) \leq c_4 \lim_{j\to\infty} W(\gamma_1^{j_0}\,\delta_1) + c_4 \lim_{j\to\infty} W(\gamma_2^{j_0}\,\delta_2) = 0$$

und also wirklich

$$\lim_{j\to\infty} W(\gamma^j\,\delta) = 0.$$

Es ist wohl kaum nötig, zu bemerken, dass $\mathfrak{d}$, das nach dem vorigen Satz nicht nur aus der Null besteht, *sehr wohl gleich* $\mathfrak{o}$ *sein kann* und also alle Elemente von J enthalten darf; dies ist z. B. der Fall für die Pseudobewertung $\Omega(\alpha)$.

Die Beziehung der beiden Ideale $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ zu einander wird durch den folgenden Satz erläutert:

b: *Die beiden Charaktere* $\mathfrak{c}$ *und* $\mathfrak{d}$ *von* $W(\alpha)$ *sind zu einander teilerfremd.*

Beweis: Ohne Einschränkung darf $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{o}$ angenommen werden; es genügt zu zeigen, dass es in $\mathfrak{d}$ eine Zahl gibt, die zu $\mathfrak{c}$ teilerfremd ist.

Nach Hilfssatz a gibt es wenigstens eine w-Zahl δ. Das damit gebildete Hauptideal (δ) habe die Zerlegung

$$(\delta) = \mathfrak{q}\,\mathfrak{r}$$

in zwei Idealfaktoren $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$, so dass $\mathfrak{q}$ allein durch solche Primideale teilbar ist, die auch in $\mathfrak{c}$ aufgehen, während $\mathfrak{r}$ zu $\mathfrak{c}$ teilerfremd ist. Somit lässt sich eine natürliche Zahl g bestimmen, dass $\mathfrak{c}^g$ durch $\mathfrak{q}$ teilbar ist. Wir verstehen unter δ^* eine beliebige Zahl aus J, die durch $\mathfrak{r}$ teilbar und zu $\mathfrak{c}$ und also auch zu $\mathfrak{q}$ teilerfremd ist; wegen $(\mathfrak{q}, \mathfrak{r}) = \mathfrak{o}$ gibt es eine solche Zahl.

Bedeutet nun γ eine ganz beliebige W-Zahl, so ist

$$\lim_{j \to \infty} W(\gamma^j \delta) = 0.$$

Nach Satz 3 ist γ durch $\mathfrak{c}$ teilbar, folglich

$$\gamma^g \delta^* \equiv 0 \pmod{\mathfrak{c}^g \mathfrak{r}} \qquad \text{und also} \qquad \gamma^g \delta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{q}\, \mathfrak{r}};$$

es gibt daher eine Zahl ε aus J, so dass

$$\gamma^g \delta^* = \delta\, \varepsilon$$

ist. Alsdann wird

$$0 \leq \lim_{j \to \infty} W(\gamma^j \delta^*) = \lim_{j \to \infty} W(\gamma^j \cdot \gamma^g \delta^*) = \lim_{j \to \infty} W(\gamma^j \delta \cdot \varepsilon) \leq W(\varepsilon) \lim_{j \to \infty} W(\gamma^j \delta) = 0$$

und also ist δ^* eine w-Zahl, so dass die Behauptung folgt.

IV.

20. Bereits in Satz 2 trat die mit $W(\alpha)$ eng verknüpfte Pseudobewertung

$$\Omega(\alpha) = \max\left(\Omega^{(l_1)}(\alpha), \quad \Omega^{(l_2)}(\alpha), \ldots, \quad \Omega^{(l_s)}(\alpha)\right)$$

auf; dabei war das Maximum über die sämtlichen in W enthaltenen Absolutbetragbewertungen

$$\Omega^{(l)}(\alpha) \qquad (l = l_1, l_2, \ldots, l_s)$$

zu erstrecken. Offenbar ist auch

$$\Omega(\alpha) \sim W(\alpha \,|\, \tilde{\mathfrak{b}}),$$

wenn wir unter $\tilde{\mathfrak{b}}$ das Pseudoideal

$$\tilde{\mathfrak{b}} = \mathfrak{p}_\infty^{(l_1)} \mathfrak{p}_\infty^{(l_2)} \ldots \mathfrak{p}_\infty^{(l_s)} \qquad (\text{d. h. } \mathfrak{b} = \mathfrak{o} \text{ für } s = 0)$$

verstehen.

Sei weiter

$$\Omega^*(\alpha) = \begin{cases} U(\alpha) & \text{für} \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{o}, \\ \sum\limits_{\mathfrak{p} | \mathfrak{c}} \Omega_{\mathfrak{p}}(\alpha) & \text{für} \quad \mathfrak{c} \neq \mathfrak{o}, \end{cases}$$

wo $\sum\limits_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}}$ über die sämtlichen verschiedenen in $\mathfrak{c}$ aufgehenden Primideale $\mathfrak{p}$ erstreckt wird; man kann hierfür auch schreiben:

$$\Omega^*(\alpha) = W(\alpha \mid \mathfrak{c}^\infty),$$

wo $\mathfrak{c}^\infty$ das Pseudoideal bedeutet, welches das formale Produkt über die Potenzen mit Exponent ∞ sämtlicher verschiedenen in $\mathfrak{c}$ aufgehenden Primideale und also speziell für $\mathfrak{c} = \mathfrak{o}$ selbst gleich $\mathfrak{o}$ ist.

Schliesslich sei

$$\Omega^{**}(\alpha) = \begin{cases} U(\alpha) & \text{für } \mathfrak{d} = \mathfrak{o}, \\ \sum\limits_{\mathfrak{p}^f \| \mathfrak{d}} W_{\mathfrak{p}^f}(\alpha) & \text{für } \mathfrak{d} \neq \mathfrak{o}, \end{cases}$$

wo jetzt $\sum\limits_{\mathfrak{p}^f \| \mathfrak{d}}$ über die verschiedenen möglichst hohen in $\mathfrak{d}$ aufgehenden Primidealpotenzen $\mathfrak{p}^f$ erstreckt wird; demnach ist auch

$$\Omega^{**}(\alpha) = W(\alpha \mid \mathfrak{d}).$$

Von den drei Pseudoidealen $\tilde{\mathfrak{b}}$, $\mathfrak{c}^\infty$ und $\mathfrak{d}$ ist das erste evidenterweise zu den zwei letzten teilerfremd, und nach Hilfssatz b des letzten Paragraphen haben auch $\mathfrak{c}^\infty$ und $\mathfrak{d}$ keinen gemeinsamen Teiler ausser $\mathfrak{o}$. Es existiert also das direkte Produkt

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{b}}\, \mathfrak{c}^\infty\, \mathfrak{d} \qquad (\tilde{\mathfrak{a}} \neq (0))$$

dieser Pseudoideale, und für die zugehörige Pseudobewertung gilt alsdann nach § 3, Hilfssatz c die Äquivalenz

$$W(\alpha \mid \tilde{\mathfrak{a}}) \sim \Omega(\alpha) + \Omega^*(\alpha) + \Omega^{**}(\alpha),$$

wo rechts eine *direkte Summe* steht. In diesem Kapitel soll festgestellt werden, ob $W(\alpha)$ und $W(\alpha \mid \tilde{\mathfrak{a}})$ einander äquivalent sind.

21. Sei im folgenden stets

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots$$

eine beliebige Folge von Zahlen aus J, die der Limesbeziehung

$$\lim_{j \to \infty} W(\alpha_j) = 0$$

genügt. Wir werden zeigen, dass alsdann auch die drei Gleichungen

(a): $$\lim_{j \to \infty} \Omega(\alpha_j) = 0,$$

(b): $$\lim_{j \to \infty} \Omega^*(\alpha_j) = 0,$$

(c): $$\lim_{j \to \infty} \Omega^{**}(\alpha_j) = 0$$

gelten müssen.

Wir beginnen mit dem sehr leichten Beweis von (a). Sei g eine beliebig grosse feste natürliche Zahl. Wegen

$$W(\alpha_j g) \leq W(\alpha_j)\, W(g) \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist dann offenbar auch

$$\lim_{j \to \infty} W(\alpha_j g) = 0$$

und also gibt es eine natürliche Zahl $j_0 = j_0(g)$, so dass

$$W(\alpha_j g) < 1 \qquad \text{für } j \geq j_0$$

ist. Wegen Definition 1 und der Bedeutung von $\Omega(\alpha)$ muss daher

$$\Omega(\alpha_j g) < 1 \qquad \text{für } j \geq j_0$$

und also

$$\Omega(\alpha_j) < \frac{1}{g} \qquad \text{für } j \geq j_0$$

sein, und da g beliebig gross sein darf, so folgt hieraus in der Tat

$$\lim_{j \to \infty} \Omega(\alpha_j) = 0.$$

Das so bewiesene Ergebnis besagt offenbar dasselbe wie die Beziehung

$$\Omega \subset W$$

oder auch wie das System von s Beziehungen

$$\Omega^{(l)} \subset W \qquad (l = l_1, l_2, \ldots, l_s).$$

Definition 1 ist somit in Übereinstimmung mit der allgemeinen Erklärung des Begriffes »*Enthaltensein*» aus dem ersten Teil der vorliegenden Arbeit.

22. Um auch die Grenzwertaussagen (b) und (c) beweisen zu können, machen wir Gebrauch von dem folgenden bekannten Satz:

a: *Zu jedem Ideal* $\mathfrak{c} \neq (0)$ *aus* J *gibt es endlichviele von* (0) *verschiedene und zu* $\mathfrak{c}$ *teilerfremde Ideale*

$$\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_H$$

dieses Ringes, so dass für jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq (0)$ *aus* J *stets mindestens eines der Produkte*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{a}\mathfrak{b}_H$$

ein Hauptideal ist.

Dieser Satz folgt leicht daraus, dass die Idealklassen von J eine endliche Gruppe bilden und dass es in jeder Idealklasse ein zu $\mathfrak{c}$ teilerfremdes Ideal gibt. Für die Anzahl H mag die Klassenzahl genommen werden; davon werden wir jedoch keinen Gebrauch machen.

Sei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ die Zahlfolge aus J mit

$$\lim_{j \to \infty} W(\alpha_j) = 0.$$

Durch die Bildung der grössten gemeinsamen Teiler

$$(\alpha_j, \mathfrak{c}^j \mathfrak{d}) = \mathfrak{a}_j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

wird jedem Element α_j dieser Folge ein Ideal $\mathfrak{a}_j$ zugeordnet, in dem allein solche Primideale aufgehen können, die Teiler von $\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{d}$ sind. Auf diese Ideale werde der vorige Satz a angewandt, und zwar möge in diesem Satz das Ideal $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ teilbar, sonst aber beliebig angenommen werden. Zu jedem Ideal $\mathfrak{a}_j$ wird also alsdann ein Ideal $\mathfrak{b}_{\iota_j}$ mit $1 \leq \iota_j \leq H$ zugeordnet, so dass das Produkt

$$\mathfrak{a}_j \mathfrak{b}_{\iota_j} = (\vartheta_j) \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

zu einem Hauptideal wird, das wir durch die Zahl $\vartheta_j \neq 0$ aus J erzeugt denken. Diese Zahl ϑ_j lässt sich allein durch solche Primideale teilen, die in $\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{d}$ oder in einem der endlichvielen Ideale $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_H$ aufgehen.

Es gibt zwei W-Zahlen γ_1 und γ_2 mit

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \mathfrak{c};$$

für jede natürliche Zahl j ist demnach auch

$$(\gamma_1^j, \gamma_2^j) = \mathfrak{c}^j.$$

Weiter existieren zwei w-Zahlen δ_1 und δ_2, so dass

$$(\delta_1,\ \delta_2) = \mathfrak{d}$$

ist. Folglich ist auch

$$\mathfrak{c}^j\,\mathfrak{d} = (\gamma_1^j\,\delta_1,\ \gamma_2^j\,\delta_1,\ \gamma_1^j\,\delta_2,\ \gamma_2^j\,\delta_2)$$

und demnach

$$\mathfrak{a}_j = (\alpha_j,\ \gamma_1^j\,\delta_1,\ \gamma_2^j\,\delta_1,\ \gamma_1^j\,\delta_2,\ \gamma_2^j\,\delta_2) \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Zahl ϑ_j ist aber durch $\mathfrak{a}_j$ teilbar und liegt also in $\mathfrak{a}_j$; es gibt daher fünf Zahlen φ_j, $\varphi_j^{(11)}$, $\varphi_j^{(21)}$, $\varphi_j^{(12)}$, $\varphi_j^{(22)}$ aus J, so dass

$$\vartheta_j = \alpha_j\,\varphi_j + \gamma_1^j\,\delta_1\,\varphi_j^{(11)} + \gamma_2^j\,\delta_1\,\varphi_j^{(21)} + \gamma_1^j\,\delta_2\,\varphi_j^{(12)} + \gamma_2^j\,\delta_2\,\varphi_j^{(22)} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

wird.

Nach dem schon wiederholt benutzten Hilfssatz a aus § 16 lässt sich nun für jedes j eine Einheit η_j aus J mit

$$\Omega(\eta_j) \leq \min\Big(\Omega(\varphi_j)^{-1},\ \Omega(\varphi_j^{(11)})^{-1},\ \Omega(\varphi_j^{(21)})^{-1},\ \Omega(\varphi_j^{(12)})^{-1},\ \Omega(\varphi_j^{(22)})^{-1}\Big) \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

und also mit

$$\Omega(\eta_j\,\varphi_j) \leq 1,\quad \Omega(\eta_j\,\varphi_j^{(11)}) \leq 1,\quad \Omega(\eta_j\,\varphi_j^{(21)}) \leq 1,\quad \Omega(\eta_j\,\varphi_j^{(12)} \leq 1,\quad \Omega(\eta_j\,\varphi_j^{(22)}) \leq 1$$
$$(j = 1, 2, 3, \ldots)$$

bestimmen; nach Satz 2 ist daher

$$W(\eta_j\,\varphi_j) \leq c_4,\quad W(\eta_j\,\varphi_j^{(11)}) \leq c_4,\quad W(\eta_j\,\varphi_j^{(21)}) \leq c_4,\quad W(\eta_j\,\varphi_j^{(12)}) \leq c_4,\quad W(\eta_j\,\varphi_j^{(22)}) \leq c_4$$
$$(j = 1, 2, 3, \ldots).$$

Wir setzen

$$\eta_j\,\vartheta_j = \theta_j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

und haben alsdann

$$\theta_j = \alpha_j \cdot \eta_j\,\varphi_j + \gamma_1^j\,\delta_1 \cdot \eta_j\,\varphi_j^{(11)} + \gamma_2^j\,\delta_1 \cdot \eta_j\,\varphi_j^{(21)} + \gamma_1^j\,\delta_2 \cdot \eta_j\,\varphi_j^{(12)} + \gamma_2^j\,\delta_2 \cdot \eta_j\,\varphi_j^{(22)}$$
$$(j = 1, 2, 3, \ldots),$$

und folglich

$$W(\theta_j) \leq c_4\Big(W(\alpha_j) + W(\gamma_1^j\,\delta_1) + W(\gamma_2^j\,\delta_1) + W(\gamma_1^j\,\delta_2) + W(\gamma_2^j\,\delta_2)\Big)$$
$$(j = 1, 2, 3, \ldots),$$

und da die Zahlen

$$W(\alpha_j),\quad W(\gamma_1^j\,\delta_1),\quad W(\gamma_2^j\,\delta_1),\quad W(\gamma_1^j\,\delta_2),\quad W(\gamma_2^j\,\delta_2)$$

mit wachsendem j gegen Null streben, so ergibt sich schliesslich:

$$\lim_{j \to \infty} W(\theta_j) = 0.$$

Die damit ermittelte neue Zahlfolge

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$$

hat ebenso wie die Folge der α_j in bezug auf W den Grenzwert 0. Ihre Glieder haben die Gestalt

$$(\theta_j) = (\alpha_j, \mathfrak{c}^j \mathfrak{d}) \mathfrak{b}_{\iota_j} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

besitzen also ausser dem wesentlichen Faktor $(\alpha_j, \mathfrak{c}^j \mathfrak{d})$ noch den unwesentlichen Faktor $\mathfrak{b}_{\iota_j}$, der nur endlichvieler verschiedenen Werte fähig und zu $\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ teilerfremd ist.

Die beiden zu beweisenden Behauptungen

(b): $$\lim_{j \to \infty} \Omega^*(\alpha_j) = 0,$$

(c): $$\lim_{j \to \infty} \Omega^{**}(\alpha_j) = 0$$

besagen nun aber offenbar nur, dass alle α_j durch eine beliebig hohe gegebene Potenz von $\mathfrak{c}$, bzw. durch die erste Potenz von $\mathfrak{d}$ teilbar sein müssen, sobald der Index j genügend gross ist. Wegen

$$(\theta_j) = (\alpha_j, \mathfrak{c}^j \mathfrak{d}) \mathfrak{b}_{\iota_j} = (\alpha_j, \mathfrak{c}^j)(\alpha_j, \mathfrak{d}) \mathfrak{b}_{\iota_j} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots)$$

sind hiermit die folgenden zwei Aussagen identisch, die sich auf die einfachere Folge der θ_j beziehen:

(b′): Alle Zahlen θ_j mit genügend grossem Index j sind durch eine beliebig hohe gegebene Potenz von $\mathfrak{c}$ teilbar.

(c′): Alle Zahlen θ_j mit genügend grossem Index j sind durch $\mathfrak{d}$ teilbar.

Diese beiden Behauptungen werden wir der Reihe nach und zwar indirekt beweisen.

23. Zuerst werde angenommen, dass (b′) falsch ist, dass also eine unendliche Teilfolge

$$\theta_{j_1}, \theta_{j_2}, \theta_{j_3}, \ldots$$

der Folge θ_j existiert, deren Glieder allein durch eine gewisse feste Potenz $\mathfrak{c}^a$ von $\mathfrak{c}$, nicht aber durch $\mathfrak{c}^{a+1}$ teilbar sind. Diese Annahme kann natürlich höchstens dann zutreffen, wenn $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{o}$ verschieden und also etwa gleich

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_f$$

ist, wo $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_f$ endlichviele von einander verschiedene Primzahlen sind. Gemäss unserer Annahme lassen sich die Glieder der vorigen Teilfolge als Idealprodukt

$$(\theta_{j_\nu}) = (\alpha_{j_\nu}, \mathfrak{d})\, \mathfrak{b}_{\iota_{j_\nu}}\, \mathfrak{p}_1^{e_{1\nu}}\, \mathfrak{p}_2^{e_{2\nu}} \ldots \mathfrak{p}_f^{e_{f\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

schreiben; dabei sind die Exponenten $e_{1\nu}, e_{2\nu}, \ldots, e_{f\nu}$ nichtnegative ganze rationale Zahlen, die für $\nu \to \infty$ nicht sämtlich über alle Grenzen wachsen. Indem wir uns die Folge der θ_{j_ν} nötigenfalls (ohne Änderung der Bezeichnung) durch eine unendliche Teilfolge ersetzt und gleichzeitig die Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_f$ geeignet umbenannt denken, dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass die Exponenten

$$e_{1\nu},\ e_{2\nu},\ \ldots,\ e_{g\nu}$$

mit ν sämtlich gegen Unendlich streben, die übrigen Exponenten

$$e_{g+1\,\nu},\ e_{g+2\,\nu},\ \ldots,\ e_{f\nu}$$

dagegen für alle ν beschränkt bleiben; dabei ist

$$g \leq f - 1$$

und möglicherweise sogar $g = 0$.

Das Ideal

$$(\alpha_{j_\nu}, \mathfrak{d})\, \mathfrak{b}_{\iota_{j_\nu}}\, \mathfrak{p}_{g+1}^{e_{g+1\,\nu}}\, \mathfrak{p}_{g+2}^{e_{g+2\,\nu}} \ldots \mathfrak{p}_f^{e_{f\nu}}$$

hat somit höchstens endlichviele Möglichkeiten. Indem wir nötigenfalls die Folge der θ_{j_ν} (wieder ohne Änderung der Bezeichnung) erneut durch eine unendliche Teilfolge ersetzt denken, dürfen wir daher annehmen, dass sogar für alle ν

$$(\alpha_{j_\nu}, \mathfrak{d})\, \mathfrak{b}_{\iota_{j_\nu}}\, \mathfrak{p}_{g+1}^{e_{g+1\,\nu}}\, \mathfrak{p}_{g+2}^{e_{g+2\,\nu}} \ldots \mathfrak{p}_f^{e_{f\nu}} = \mathfrak{t}$$

gleich einem festen Ideal $\mathfrak{t} \neq (\mathfrak{o})$ von J ist. Alsdann wird schliesslich

$$(\theta_{j_\nu}) = \mathfrak{t}\, \mathfrak{p}_1^{e_{1\nu}}\, \mathfrak{p}_2^{e_{2\nu}} \ldots \mathfrak{p}_g^{e_{g\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

wobei die Exponenten $e_{1\nu}, e_{2\nu}, \ldots, e_{f\nu}$ nichtnegative ganze rationale Zahlen sind, die für $\nu \to \infty$ sämtlich über alle Grenzen wachsen. Für alle genügend grossen ν ist also θ_{j_ν} durch eine gegebene beliebig hohe Potenz des Ideals

$$\mathfrak{c}^* = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_g \qquad\qquad (\text{d. i. } \mathfrak{c}^* = \mathfrak{o} \text{ für } g = 0)$$

teilbar. Weiter ist natürlich

$$\lim_{\nu \to \infty} W(\theta_{j_\nu}) = 0$$

und also insbesondere nach § 21

$$\lim_{\nu \to \infty} \Omega(\theta_{j_\nu}) = 0.$$

Bedeute jetzt $\gamma \neq 0$ eine Zahl aus J mit

$$\Omega(\gamma) < 1, \quad \mathfrak{c}^* \mid \gamma, \quad (\gamma, \mathfrak{p}_{g+1} \mathfrak{p}_{g+2} \ldots \mathfrak{p}_f) = \mathfrak{o}$$

und $\tau \neq 0$ eine beliebige durch $\mathfrak{t}$ teilbare Zahl dieses Ringes. Sei ferner $j_{\nu(i)}$ für jede genügend grosse natürliche Zahl i das grösste Element der Folge

$$j_1, j_2, j_3, \ldots$$

das den sämtlichen Bedingungen

$$\theta_{j_{\nu(i)}} \mid \gamma^i \tau, \quad \Omega^{(l)}(\theta_{j_{\nu(i)}}) \geq \Omega^{(l)}(\gamma^i \tau) \qquad\qquad (l = l_1, l_2, \ldots, l_s)$$

genügt. Da von einem gewissen i ab die Zahl $\gamma^i \tau$ durch jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{c}^*$ teilbar ist und ferner die Gleichung

$$\lim_{i \to \infty} \Omega(\gamma^i \tau) = 0$$

besteht, so ist klar, dass für $i \to \infty$ auch $j_{\nu(i)}$ über alle Grenzen wächst. Gemäss der Definition von $j_{\nu(i)}$ gibt es aber ein λ_i aus J mit

$$\gamma^i \tau = \lambda_i \theta_{j_{\nu(i)}}$$

und diese Zahl genügt offenbar der Ungleichung

$$\Omega(\lambda_i) \leq 1,$$

nach Satz 2 also auch der Ungleichung

$$W(\lambda_i) \leq c_4.$$

Es wird daher

$$W(\gamma^i \tau) \leq c_4\, W(\theta_{j_{\nu(i)}})$$

und folglich

$$0 \leq \lim_{i \to \infty} W(\gamma^i \tau) \leq c_4 \lim_{i \to \infty} W(\theta_{j_{\nu(i)}}) = 0,$$

so dass γ eine W-Zahl sein muss. Das steht aber im Widerspruch zu Satz 3, denn γ ist nach Konstruktion nicht durch $\mathfrak{c}$ teilbar.

24. Von jetzt ab darf also schon benutzt werden, dass die Aussagen (b′) und (b) wahr sind. Sei dagegen (c′) falsch; es gebe also eine unendliche Teilfolge

$$\theta_{j_1},\ \theta_{j_2},\ \theta_{j_3},\ \ldots$$

der Folge θ_j, deren sämtliche Elemente nicht durch $\mathfrak{d}$ teilbar sind. Da $\mathfrak{d}$ nur endlichviele Teiler besitzt, so folgt also, falls wir uns die Folge der θ_{j_ν} nötigenfalls (ohne Änderung der Bezeichnung) durch eine unendliche Teilfolge ersetzt denken, dass für alle ν

$$(\theta_{j_\nu}, \mathfrak{d}) = (\alpha_{j_\nu}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{d}^*$$

ist, wo $\mathfrak{d}^*$ einen echten Teiler von $\mathfrak{d}$ bedeutet, d. h. in

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}^*\, \mathfrak{d}^{**}$$

ist $\mathfrak{d}^{**}$ von $\mathfrak{o}$ verschieden. Somit wird

$$(\theta_{j_\nu}) = \mathfrak{d}^*\, \mathfrak{b}_{\iota_{j_\nu}}\, (\alpha_{j_\nu}, \mathfrak{c}^{j_\nu}) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Für alle genügend grossen ν ist θ_{j_ν} offenbar durch eine gegebene beliebig hohe Potenz von $\mathfrak{c}$ teilbar; ferner folgt wie im vorigen Paragraphen, dass

$$\lim_{\nu \to \infty} \Omega(\theta_{j_\nu}) = 0$$

ist.

Bedeute nunmehr γ eine willkürliche W-Zahl, $\delta \neq 0$ eine Zahl aus J mit

$$\mathfrak{d}^*\, \mathfrak{b}_1\, \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_H \mid \delta, \quad (\delta, \mathfrak{d}^{**}) = \mathfrak{o},$$

und werde ferner für jede genügend grosse natürliche Zahl i unter $j_{\nu(i)}$ die grösste Zahl der Folge

$$j_1,\ j_2,\ j_3,\ \ldots$$

verstanden, die gleichzeitig den sämtlichen Bedingungen

$$\theta_{j_{\nu(i)}} \mid \gamma^i \delta, \quad \Omega^{(l)}(\theta_{j_{\nu(i)}}) \geq \Omega^{(l)}(\gamma^i \delta) \qquad (l = l_1, l_2, \ldots, l_s)$$

genügt. Da von einem gewissen i ab die Zahl $\gamma^i \delta$ durch jede noch so hohe Potenz von $\mathfrak{c}$ teilbar und da ferner

$$\lim_{i \to \infty} \Omega(\gamma^i \delta) = 0$$

ist, so muss offenbar für $i \to \infty$ auch $j_{\nu(i)}$ über alle Grenzen wachsen. Auf Grund der Definition von $j_{\nu(i)}$ gibt es aber ein μ_i aus J mit

$$\gamma^i \delta = \mu_i \theta_{j_{\nu(i)}},$$

und diese Zahl genügt offenbar der Ungleichung

$$\Omega(\mu_i) \leq 1,$$

nach Satz 2 also auch der Ungleichung

$$W(\mu_i) \leq c_4,$$

so dass

$$W(\gamma^i \delta) \leq c_4 W(\theta_{j_{\nu(i)}})$$

und wegen

$$\lim_{i \to \infty} W(\theta_{j_{\nu(i)}}) = 0$$

auch

$$\lim_{i \to \infty} W(\gamma_i \delta) = 0$$

ist. Die Zahl δ stellt daher eine w-Zahl dar, und das kann nicht sein, da $\mathfrak{d}$ nicht in δ aufgeht.

25. Damit ist auch die Eigenschaft (c′) oder (c) bewiesen. Offenbar lassen sich die Grenzwertgesetze (b) und (c) auch kurz in der Form

$$\Omega^* \subset W \qquad \text{und} \qquad \Omega^{**} \subset W$$

ausdrücken; zusammen mit der Relation

$$\Omega \subset W$$

liefern sie die Beziehung

$$\Omega + \Omega^* + \Omega^{**} \subset W.$$

Als Abschluss dieser Arbeit werden wir zeigen, dass auch

$$W \subset \Omega + \Omega^* + \Omega^{**}$$

und also sogar

$$W \sim \Omega + \Omega^* + \Omega^{**}$$

ist.

Sei dazu

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

eine unendliche Folge von Zahlen aus J, die den drei Beziehungen

$$\lim_{j \to \infty} \Omega(\alpha_j) = 0, \qquad \lim_{j \to \infty} \Omega^*(\alpha_j) = 0, \qquad \lim_{j \to \infty} \Omega^{**}(\alpha_j) = 0$$

genügt; es soll bewiesen werden, dass dann auch

$$\lim_{j \to \infty} W(\alpha_j) = 0$$

ist. Offenbar dürfen wir bei diesem Nachweis ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die sämtlichen Glieder α_j der betrachteten Folge von Null verschieden sind.

Sei wie bisher $\mathfrak{c}$ der Hauptcharakter, $\mathfrak{d}$ der Nebencharakter von W. Wegen der Endlichkeit der Klassenanzahl von J gibt es eine W-Zahl γ, die allein durch solche Primideale teilbar ist, die in $\mathfrak{c}$ aufgehen. Weiter sei δ eine willkürliche w-Zahl und alsdann

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_f$$

ein vollständiges Repräsentantensystem der verschiedenen Restklassen nach dem Modul (δ); dieses System ist natürlich endlich.

Nach Voraussetzung streben die Zahlen $\Omega(\alpha_j)$ für $j \to \infty$ gegen Null; ferner sind die Zahlen α_j für genügend grosses j durch beliebig hohe Potenzen von $\mathfrak{c}$ und also auch durch solche Potenzen von γ teilbar; endlich sind sie alle von einem gewissen j ab durch $\mathfrak{d}$ teilbar. Unter $i(j)$ werde die grösste natürliche Zahl verstanden, für die gleichzeitig

$$\gamma^{i(j)} \mid \alpha_j, \quad \Omega^{(l)}(\gamma^{i(j)}) \geq \Omega^{(l)}(\alpha_j) \qquad (l = l_1, l_2, \ldots, l_s)$$

ist; es ist also klar, dass diese Zahl gleichzeitig mit j über alle Grenzen wächst. Setzen wir

$$\alpha_j = \gamma^{i(j)} \varrho_j,$$

so sind die Quotienten ϱ_j von Null verschiedene Zahlen aus J, die für hinreichend grosses j durch $\mathfrak{d}$ teilbar sind und der Ungleichung

$$\Omega(\varrho_j) \leq 1$$

genügen. Jeder einzelne von ihnen lässt sich schreiben in der Form:

$$\varrho_j = \delta\,\sigma_j + \tau^{(j)},$$

wo die σ_j gewisse Zahlen aus J, die $\tau^{(j)}$ aber jeweils Elemente des Repräsentantensystems

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \ldots,\ \tau_f$$

sind. Da δ nicht verschwindet und

$$\Omega^{(l)}(\delta)\ \Omega^{(l)}(\sigma_j) \leq \Omega^{(l)}(\varrho_j) + \Omega^{(l)}(\tau^{(j)}) \qquad (l = l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_s)$$

ist, so bleiben die Zahlen

$$\Omega(\sigma_j) \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

und folglich nach Satz 2 auch die Zahlen

$$W(\sigma_j) \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

unter einer festen positiven Schranke. Weil ferner δ und für hinreichend grosses j auch ϱ_j durch $\mathfrak{d}$ teilbar ist, so wird auch $\tau^{(j)}$ von einem j ab durch $\mathfrak{d}$ teilbar und also eine w-Zahl oder gleich 0. Weil $\tau^{(j)}$ nur endlichvieler Werte fähig ist, gilt somit auf jeden Fall

$$\lim_{j\to\infty} W(\gamma^{i(j)}\,\tau^{(j)}) = 0,$$

und weiter ist natürlich auch

$$\lim_{j\to\infty} W(\gamma^{i(j)}\,\delta) = 0.$$

Wegen

$$W(\alpha_j) \leq W(\gamma^{i(j)}\,\delta)\ W(\sigma_j) + W(\gamma^{i(j)}\,\tau^{(j)})$$

und der Beschränktheit der $W(\sigma_j)$ folgt daraus die Behauptung

$$\lim_{j\to\infty} W(\alpha_j) = 0.$$

Damit ist der Beweis der Äquivalenz

$$W \sim \Omega + \Omega^* + \Omega^{**}$$

zu Ende geführt. Nach § 20 lässt sie sich auch in der Form

$$W(\alpha) \sim W(\alpha \mid \tilde{\mathfrak{a}})$$

schreiben, wo $\tilde{\mathfrak{a}}$ das Pseudoideal

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{b}}\, \mathfrak{c}^\infty\, \mathfrak{d}$$

bezeichnet, das durch die Pseudobewertung $W(\alpha)$ eindeutig bestimmt ist. Der Beweis setzte voraus, dass $W(\alpha)$ nicht zur trivialen Pseudobewertung oder zur uneigentlichen Pseudobewertung äquivalent ist. In diesen Ausnahmefällen ist aber in der Bezeichnung des ersten Kapitels

$$W(\alpha) \sim W(\alpha \mid (0)), \quad \text{bzw.} \quad W(\alpha) \sim W(\alpha \mid \mathfrak{o}),$$

so dass man zu einem formal gleichlautenden Ergebnis kommt. Wir können also als abschliessendes Ergebnis den folgenden Satz aussprechen:

»*Zu jeder Pseudobewertung* $W(\alpha)$ *von* J *gibt es ein Pseudoideal* $\tilde{\mathfrak{a}}$, *so dass*

$$W(\alpha) \sim W(\alpha \mid \tilde{\mathfrak{a}}),$$

wo $W(\alpha \mid \tilde{\mathfrak{a}})$ *die zu* $\tilde{\mathfrak{a}}$ *gehörige spezielle Pseudobewertung bedeutet, ist. Wird von den beiden Ausnahmefällen*

$$\tilde{\mathfrak{a}} = (0) \quad \textit{und} \quad \tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{o}$$

abgesehen, so wird

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{b}}\, \mathfrak{c}^\infty\, \mathfrak{d},$$

und zwar bedeutet dabei $\tilde{\mathfrak{b}}$ *das Produkt der sämtlichen unendlichen Primideale* $\mathfrak{p}_\infty^{(l)}$, *für die die zugehörige Absolutbetragbewertung* $\Omega^{(l)}(\alpha)$ *in* $W(\alpha)$ *enthalten ist,* $\mathfrak{c}$ *den Hauptcharakter und* $\mathfrak{d}$ *den Nebencharakter von* $W(\alpha)$.»

Groningen, Oktober 1935.

Kurt Mahler.