Mathematics. — *Ueber Pseudobewertungen Ia. (Zerlegungssätze).* Von KURT MAHLER. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of November 30, 1935).

Die Untersuchungen des ersten Teils der vorliegenden Arbeit (Acta Mathematica. Bd. 66, S. 79—119) werden fortgesetzt, die Eigenschaften direkter Summendarstellungen näher betrachtet, und es wird u. a. der folgende Satz bewiesen: *„Lässt sich eine Pseudobewertung $W(a)$ auf zwei verschiedene Arten*

$$W(a) \backsim \sum_{k=1}^{n} W_k(a) \quad \text{und} \quad W(a) \backsim \sum_{K=1}^{N} W^{(K)}(a)$$

als direkte Summe je endlich vieler irreduzibler, nicht identisch verschwindender Pseudobewertungen darstellen, so sind die Summanden dieser beiden Zerlegungen bis auf die Reihenfolge einander Glied für Glied äquivalent." Eine solche Zerlegung ist also bis auf Aequivalenz eindeutig.

1. Im folgenden legen wir dieselben Bezeichnungen zugrunde wie in der Arbeit „Ueber Pseudobewertungen I", auf die wegen der benutzten Definitionen und Sätze verwiesen sei.

R bedeutet stets einen festen kommutativen Ring mit Eins-Element 1, $W(a)$ eine feste Pseudobewertung desselben und

$$W(a) \backsim W_1(a) + W_2(a) + \ldots + W_n(a)$$

eine gleichfalls feste Darstellung von $W(a)$ als direkte Summe der endlich vielen unabhängigen Pseudobewertungen

$$W_1(a),\ W_2(a), \ldots,\ W_n(a)$$

von R. Auch alle sonstigen Pseudobewertungen, die im Text vorkommen, z.B. $W^*(a)$, $W^{**}(a)$, $W_k^{*(K)}(a)$, usw., gehören zum Ring R und werden überdies in $W(a)$ enthalten sein. Wir werden fortwährend davon Gebrauch machen, dass aus einer Relation

$$W'(a) \subset W''(a)$$

zwischen zwei Pseudobewertungen folgt, dass jede Fundamentalfolge bzw. Nullfolge in bezug auf $W''(a)$ auch eine solche in bezug auf $W'(a)$ darstellt.

2. Wegen der Unabhängigkeit von $W_1(a), W_2(a), \ldots, W_n(a)$ gibt es n unendliche Folgen

$$d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, d_3^{(k)}, \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

die in bezug auf diese Pseudobewertungen den n^2 Limesgleichungen

$$\lim_{m \to \infty} W_h(d_m^{(k)} - \delta_{hk}) = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen; dabei ist wie üblich

$$\delta_{hk} = \begin{cases} 1 \text{ für } h = k, \\ 0 \text{ für } h \neq k. \end{cases}$$

Diese Folgen sind daher insbesondere in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \ldots, W_n(a)$ und also auch in bezug auf deren Summe $W(a)$ Fundamentalfolgen.

Bedeutet $W^*(a)$ irgend eine in $W(a)$ enthaltene Pseudobewertung:

$$W^*(a) \subset W(a),$$

so stellen die vorigen Folgen erst recht in bezug auf $W^*(a)$ Fundamentalfolgen dar, und also existieren für jedes a aus R die Grenzwerte

$$\lim_{m \to \infty} a\, d_m^{(k)} (W^*) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und folglich auch die reellen Limites

$$W_k^*(a) = \lim_{m \to \infty} W^*(a\, d_m^{(k)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Die durch sie definierten n Funktionen $W_k^*(a)$ der Zahlen a aus R nennen wir die Komponenten von $W^*(a)$ in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \ldots, W_n(a)$. Sie hängen nicht von der speziellen Wahl der n Folgen

$$d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, d_3^{(k)}, \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ab. Denn sind

$$e_1^{(k)}, e_2^{(k)}, e_3^{(k)}, \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

n andere Folgen mit

$$\lim_{m \to \infty} W_h(e_m^{(k)} - \delta_{hk}) = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

so ist offenbar für jedes a aus R

$$\lim_{m \to \infty} W_h(a(e_m^{(k)} - d_m^{(k)})) = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

also

$$\lim_{m \to \infty} W(a(e_m^{(k)} - d_m^{(k)})) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{m \to \infty} W^*(a(e_m^{(k)} - d_m^{(k)})) = 0$$

und daher

$$\lim_{m \to \infty} W^*(a\, e_m^{(k)}) = \lim_{m \to \infty} W^*(a\, d_m^{(k)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

3. **Satz 1**: *Die n Komponenten $W_k^*(a)$ von $W^*(a)$ sind Pseudobewertungen.*

Beweis: Es ist erstens trivialerweise

$$W_k^*(0) = 0, \quad W_k^*(a) \geqq 0 \text{ für } a \text{ in } R.$$

Aus der Dreiecksungleichung für $W^*(a)$ folgt zweitens

$$W_k^*(a-b) = \lim_{m \to \infty} W^*(a\,d_m^{(k)} - b\,d_m^{(k)}) \leqq \lim_{m \to \infty} \{ W^*(a\,d_m^{(k)}) + W^*(b\,d_m^{(k)}) \} =$$
$$= W_k^*(a) + W_k^*(b).$$

Drittens ist endlich auch

$$W_k^*(a\,b) \leqq W_k^*(a)\, W_k^*(b),$$

wie sich folgendermassen ergibt: Jede der n Folgen

$$d_1^{(k)2} - d_1^{(k)}, \quad d_2^{(k)2} - d_2^{(k)}, \quad d_3^{(k)2} - d_3^{(k)}, \ldots \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

konvergiert offenbar in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \ldots, W_n(a)$, also auch in bezug auf $W(a)$ und folglich auch in bezug auf $W^*(a)$ gegen Null, so dass daher insbesondere für zwei beliebige Zahlen a und b aus R

$$\lim_{m \to \infty} W^*(a\,b\,(d_m^{(k)2} - d_m^{(k)})) = 0$$

und demnach

$$\lim_{m \to \infty} W^*(a\,b\,d_m^{(k)}) = \lim_{m \to \infty} W^*(a\,d_m^{(k)} \cdot b\,d_m^{(k)} - a\,b\,(d_m^{(k)2} - d_m^{(k)})) =$$
$$= \lim_{m \to \infty} W^*(a\,d_m^{(k)} \cdot b\,d_m^{(k)})$$

ist; hieraus ergibt sich aber in der Tat

$$W_k^*(a\,b) = \lim_{m \to \infty} W^*(a\,b\,d_m^{(k)}) = \lim_{m \to \infty} W^*(a\,d_m^{(k)} \cdot b\,d_m^{(k)}) \leqq$$
$$\leqq \lim_{m \to \infty} \{ W^*(a\,d_m^{(k)})\, W^*(b\,d_m^{(k)}) \} = W_k^*(a)\, W_k^*(b). \text{ [1]}$$

4. **Satz 2**: *Es ist $W^*(a) \backsim W_1^*(a) + W_2^*(a) + \ldots + W_n^*(a)$.*

Beweis: Wegen $W^*(a\,d_m^{(k)}) \leqq W^*(a)\ W^*(d_m^{(k)})$ ist

$$W_k^*(a) \leqq \lim_{m \to \infty} \{ W^*(a)\, W^*(d_m^{(k)}) \} = W^*(a)\, W_k^*(1)$$

und also

$$(a): \quad W_k^*(a) \subset W^*(a) \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{d. h. } \sum_{k=1}^{n} W_k^*(a) \subset W^*(a).$$

---

[1] Es ist natürlich möglich, dass eine oder mehrere der Komponenten $W_k^*(a)$ für alle a verschwindet, also gleich der uneigentlichen Pseudobewertung $U(a)$ ist.

Weiter ist für jedes a aus R

$$a - \sum_{k=1}^{n} a\, d_m^{(k)} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

eine Nullfolge in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \ldots, W_n(a)$, also in bezug auf $W(a)$ und folglich auch in bezug auf $W^*(a)$:

$$\lim_{m \to \infty} W^*\left(a - \sum_{k=1}^{n} a\, d_m^{(k)}\right) = 0.$$

Aus der Dreiecksungleichung ergibt sich daher

$$W^*(a) \leqq \sum_{k=1}^{n} \lim_{m \to \infty} W^*(a\, d_m^{(k)}) = \sum_{k=1}^{n} W_k^*(a),$$

und somit gilt:

(b): $$W^*(a) \subset \sum_{k=1}^{n} W_k^*(a).$$

Die Aussagen (a) und (b) enthalten zusammen die Behauptung.

5. **Satz 3:** *Seien $W^*(a)$ und $W^{**}(a)$ zwei Pseudobewertungen von R mit $W^*(a) \subset W^{**}(a) \subset W(a)$, und seien ferner $W_1^*(a), W_2^*(a), \ldots, W_n^*(a)$, bzw. $W_1^{**}(a), W_2^{**}(a), \ldots, W_n^{**}(a)$ die Komponenten von $W^*(a)$, bzw. von $W^{**}(a)$. Dann ist $W_k^*(a) \subset W_k^{**}(a)$ für $k = 1, 2, \ldots, n$.*

Beweis: Wir müssen zeigen, dass für jede Folge

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ldots$$

aus R mit

$$\lim_{m \to \infty} W_k^{**}(a_m) = 0, \text{ d. h. } \lim_{m \to \infty} \lim_{\mu \to \infty} W^{**}(a_m\, d_\mu^{(k)}) = 0$$

auch

$$\lim_{m \to \infty} W_k^*(a_m) = 0, \quad \text{d. h. } \lim_{m \to \infty} \lim_{\mu \to \infty} W^*(a_m\, d_\mu^{(k)}) = 0$$

ist. Dies folgt aber leicht aus der Voraussetzung $W^*(a) \subset W^{**}(a)$.

Satz 4: *Ist $W^*(a) \subset W(a)$, $W^{**}(a) \subset W(a)$ und $W^*(a) \backsim W^{**}(a)$, so gilt für die zu $W^*(a)$ und $W^{**}(a)$ gehörigen Komponenten: $W_k^*(a) \backsim W_k^{**}(a)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.*

Beweis: Klar nach Satz 3.

6. **Satz 5:** *Die Komponenten $W_1'(a), W_2'(a), \ldots, W_n'(a)$ von $W(a)$ in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \ldots, W_n(a)$ genügen den Aequivalenz-Beziehungen $W_k'(a) \backsim W_k(a)$ für $k = 1, 2, \ldots, n$.*

Beweis: Ist erstens $a_1, a_2, \ldots$ eine unendliche Zahlfolge aus R mit

$$\lim_{m \to \infty} W_k(a_m) = 0,$$

so gelten offenbar auch die n Gleichungen

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{\mu \to \infty} W_h(a_m d_\mu^{(k)}) = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus diesen folgt die Beziehung

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{\mu \to \infty} W(a_m d_\mu^{(k)}) = 0,$$

und das ist nach Definition dasselbe wie

$$\lim_{m \to \infty} W'_k(a_m) = 0.$$

Ist zweitens

$$\lim_{m \to \infty} W'_k(a_m) = \lim_{m \to \infty} \lim_{\mu \to \infty} W(a_m d_\mu^{(k)}) = 0,$$

so gilt erst recht

$$\lim_{m \to \infty} \lim_{\mu \to \infty} W_k(a_m d_\mu^{(k)}) = 0,$$

wegen

$$\lim_{\mu \to \infty} W_k(a_m d_\mu^{(k)}) = W_k(a_m)$$

also wirklich

$$\lim_{m \to \infty} W_k(a_m) = 0.$$

Satz 6: *Ist $W^*(a) \subset W(a)$ und bedeuten $W_1^*(a), W_2^*(a), \ldots, W_n^*(a)$ die Komponenten von $W^*(a)$ in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \ldots, W_n(a)$, so gelten die Beziehungen: $W_k^*(a) \subset W_k(a)$ für $k = 1, 2, \ldots, n$. Ist sogar $W^*(a) \backsim W(a)$, so hat man: $W_k^*(a) \backsim W_k(a)$ für $k = 1, 2, \ldots, n$.*

Beweis: Klar nach den Sätzen 3, 4 und 5.

7. **Satz 7**: *Seien $W^*(a), W^{*(1)}(a), W^{*(2)}(a), \ldots, W^{*(N)}(a)$ beliebige $N+1$ in $W(a)$ enthaltene Pseudobewertungen mit*

$$W^*(a) \backsim W^{*(1)}(a) + W^{*(2)}(a) + \ldots + W^{*(N)}(a),$$

und $W_k^*(a), W_k^{*(1)}(a), W_k^{*(2)}(a), \ldots, W_k^{*(N)}(a)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ihre Komponenten in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \ldots, W_n(a)$. Dann ist

$$W_k^*(a) \backsim W_k^{*(1)}(a) + W_k^{*(2)}(a) + \ldots + W_k^{*(N)}(a) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt insbesondere

$$W^{*(K)}(a) \subset W^{*}(a) \qquad (K = 1, 2, \ldots, N).$$

Daher ist nach Satz 3

$$W_k^{*(K)}(a) \subset W_k^{*}(a) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ K = 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix}$$

und somit

$$(a): \; W_k^{*(1)}(a) + W_k^{*(2)}(a) + \ldots + W_k^{*(N)}(a) \subset W_k^{*}(a) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Weiter ist für jede unendliche Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aus R mit

$$\lim_{m \to \infty} W_k^{*(K)}(a_m) = \lim_{m \to \infty} \lim_{\mu \to \infty} W^{*(K)}(a_m\, d_\mu^{(k)}) = 0 \qquad (K = 1, 2, \ldots, N)$$

offenbar auch

$$\lim_{m \to \infty} W_k^{*}(a_m) = \lim_{m \to \infty} \lim_{\mu \to \infty} W^{*}(a_m\, d_\mu^{(k)}) = 0,$$

und also ergibt sich:

$$(b): \quad W_k^{*}(a) \subset W_k^{*(1)}(a) + W_k^{*(2)}(a) + \ldots + W_k^{*(N)}(a) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus (a) und (b) zusammen folgt die Behauptung.

8. **Satz 8**: *Bedeuten $W^{*(1)}(a), W^{*(2)}(a), \ldots, W^{*(N)}(a)$ beliebige N von einander unabhängige, in $W(a)$ enthaltene Pseudobewertungen von R, so sind die nN zugehörigen Komponenten in bezug auf $W_1(a)$, $W_2(a), \ldots, W_n(a)$:*

$$W_k^{*(K)}(a) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ K = 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix}.$$

ebenfalls von einander unabhängig.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es N unendliche Zahlfolgen

$$D_1^{(K)},\; D_2^{(K)},\; D_3^{(K)}, \ldots \qquad (K = 1, 2, \ldots, N)$$

aus R mit

$$\lim_{m \to \infty} W^{*(H)}(D_m^{(K)} - \delta_{HK}) = 0 \qquad (H, K = 1, 2, \ldots, N).$$

Wir werden die Behauptung offenbar bewiesen haben, wenn wir zeigen, dass

$$\lim_{m\to\infty} W_h^{*(H)}(d_m^{(k)} D_m^{(K)} - \delta_{hk}\,\delta_{HK}) =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\lim_{\mu\to\infty} W^{*(H)}(\{d_m^{(k)} D_m^{(K)} - \delta_{hk}\,\delta_{HK}\}\, d_\mu^{(h)}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} h, k = 1, 2, \ldots, n \\ H, K = 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix}$$

ist. Wegen

$$(d_m^{(k)} D_m^{(K)} - \delta_{hk}\,\delta_{HK})\,\delta_\mu^{(h)} = (D_m^{(K)} - \delta_{HK})\, d_m^{(k)}\, d_\mu^{(h)} + \delta_{HK}(d_m^{(k)} - \delta_{hk})\, d_\mu^{(h)}$$

genügt es statt dessen zu beweisen, dass

$$(a):\quad \lim_{m\to\infty}\lim_{\mu\to\infty} W^{*(H)}(\{D_m^{(K)} - \delta_{HK}\}\, d_m^{(k)}\, d_\mu^{(h)}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} h, k = 1, 2, \ldots, n \\ H, K = 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix}$$

und

$$(b):\quad \lim_{m\to\infty}\lim_{\mu\to\infty} W^{*(H)}(\delta_{HK}\{d_m^{(k)} - \delta_{hk}\}\, d_\mu^{(h)}) = 0 \qquad \begin{pmatrix} h, k = 1, 2, \ldots, n \\ H, K = 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix}$$

ist. Hiervon ergibt sich (a) aus

$$\lim_{m\to\infty} W^{*(H)}(D_m^{(K)} - \delta_{HK}) = 0$$

und der Beschränktheit der Zahlen

$$W^{*(H)}(d_m^{(k)}),\quad W^{*(H)}(d_\mu^{(h)})$$

für alle m und μ, da ja die $d_m^{(k)}$ und $d_\mu^{(h)}$ wegen $W^{*(H)}(a) \subset W(a)$ Fundamentalfolgen in bezug auf die Pseudobewertungen $W^{*(H)}(a)$ sind. Die Gleichung (b) dagegen folgt aus der Beschränktheit der Zahl $W^{*H}(\delta_{HK})$ und aus

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\mu\to\infty} W^{*(H)}(\{d_m^{(k)} - \delta_{hk}\}\, d_\mu^{(h)}) = 0,$$

was sofort aus den Gleichungen

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\mu\to\infty} W_l(\{d_m^{(k)} - \delta_{hk}\}\, d_\mu^{(h)}) = 0 \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt wegen $W^{*(H)}(a) \subset W(a)$.

9. **Satz 9**: *Die in $W(a)$ enthaltene Pseudobewertung $W^*(a)$ besitze die direkte Summendarstellung*

$$W^*(a) \backsim \sum_{K=1}^{N} W^{*(K)}(a)$$

und es seien

$$W_k^*(a),\ W_k^{*(1)}(a),\ W_k^{*(2)}(a), \ldots, W_k^{*(N)}(a) \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

die zu ihr und ihren Summanden gehörigen Komponenten in bezug auf $W_1(a), W_2(a), \ldots, W_n(a)$. *Dann gelten die direkten Summendarstellungen:*

$$W^*(a) \backsim \sum_{K=1}^{N} W^{*(K)}(a) \text{ mit } W^{*(K)}(a) \backsim \sum_{k=1}^{n} W_k^{*(K)}(a) \qquad (K = 1, 2, \ldots, N),$$

$$W^*(a) \backsim \sum_{k=1}^{n} W_k^*(a) \text{ mit } W_k^*(a) \backsim \sum_{K=1}^{N} W_k^{*(K)}(a) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$W^*(a) \backsim \sum_{K=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} W_k^{*(K)}(a).$$

Beweis: Diese Summendarstellungen folgen sofort aus den beiden Sätzen 2 und 7. Sie sind direkt auf Grund des vorigen Satzes, da mit einem System von Pseudobewertungen auch jedes Teilsystem unabhängig ist.

Lassen wir im vorigen Satz $W(a)$ und $W^*(a)$ zusammenfallen, so kommen wir endlich zu folgendem Resultat:

Hauptsatz: *Die Pseudobewertung* $W(a)$ *von* R *lasse die zwei direkten Summendarstellungen*

$$W(a) \backsim \sum_{k=1}^{n} W_k(a) \qquad \text{und} \qquad W(a) \backsim \sum_{K=1}^{N} W^{(K)}(a)$$

zu, in denen n, *bzw.* N *Summanden auftreten. Dann gibt es* nN *weitere Pseudobewertungen*

$$W_k^{(K)}(a) \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ K = 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix}$$

von R, *so dass die direkten Summendarstellungen*

$$W(a) \backsim \sum_{k=1}^{n} \sum_{K=1}^{N} W_k^{(K)}(a) \qquad \begin{aligned} W_k(a) &\backsim \sum_{K=1}^{N} W_k^{(K)}(a) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \\ W^{(K)}(a) &\backsim \sum_{k=1}^{n} W_k^{(K)}(a) \qquad (K = 1, 2, \ldots, N) \end{aligned}$$

bestehen. Sind die Pseudobewertungen $W_1(a), W_2(a), \ldots, W_n(a)$ *irreduzibel und von der uneigentlichen Pseudobewertung* $U(a) \equiv 0$ *verschieden, sind ferner die Pseudobewertungen* $W^{(1)}(a), W^{(2)}(a), \ldots, W^{(N)}(a)$ *ebenfalls alle ungleich* $U(a)$, *so müssen somit diese beiden Systeme von* n, *bezw.* N *Pseudobewertungen aus (bis auf die Reihenfolge) gliedweise äquivalenten Gliedern bestehen, und es ist insbesondere* $n = N$.

Zum Abschluss sei noch erwähnt, dass die Komponenten $W_k^{(K)}(a)$ der auf zwei Arten:

$$W(a) \backsim \sum_{k=1}^{n} W_k(a) \quad \text{und} \quad W(a) \backsim \sum_{K=1}^{N} W^{(K)}(a)$$

als direkte Summe dargestellten Pseudobewertung $W(a)$ sich auch symmetrisch in beiden Zerlegungen darstellen lassen. Versteht man nämlich unter

$$d_1^{(k)},\ d_2^{(k)},\ d_3^{(k)},\ \dots \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\text{bzw.}\quad D_1^{(K)},\ D_2^{(K)},\ D_3^{(K)},\ \dots \qquad (K = 1, 2, \dots, N)$$

n, bzw. N unendliche Folgen aus R mit

$$\lim_{m \to \infty} W_h\,(d_m^{(k)} - \delta_{hk}) = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \dots, n),$$

$$\lim_{m \to \infty} W^{(H)}\,(D_m^{(K)} - \delta_{HK}) = 0 \qquad (H, K = 1, 2, \dots, N),$$

so wird, wie man leicht zeigt:

$$W_k^{(K)}\,(a) = \lim_{\substack{m \to \infty \\ \mu \to \infty}} W\,(a\, d_m^{(k)}\, D_\mu^{(K)}),$$

und zwar darf hier der Limes in irgend einer Reihenfolge ausgeführt werden. Somit sind die Komponenten der $W^{(K)}(a)$ $(K = 1, 2, \dots, N)$ in bezug auf die $W_k(a)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ äquivalent den Komponenten der $W_k(a)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ in bezug auf die $W^{(K)}(a)$ $(K = 1, 2, \dots, N)$.

10. Der Hauptsatz erlaubt zu zeigen, dass der Ring P aller Polynome $a(x)$ in x mit rationalen Koeffizienten nicht elementar ist, d.h. dass nicht jede Pseudobewertung dieses Ringes sich als direkte Summe endlich vieler irreduzibler Pseudobewertungen darstellen lässt. Offenbar werden nämlich für jede natürliche Zahl n durch

$$W_n\,(a) = \max_{k = n, n+1, \dots} \left(\left| a\left(\frac{1}{k}\right) \right|,\ |a(0)| \right) \quad \text{und} \quad W_n^*\,(a) = \left| a\left(\frac{1}{n}\right) \right|$$

zwei Pseudobewertungen von P definiert, und es ist offenbar

$$W_1\,(a) \backsim W_n\,(a) + \sum_{k=1}^{n-1} W_k^*\,(a) \qquad (n = 2, 3, \dots)$$

eine Darstellung von $W_1(a)$ als direkte Summe n unabhängiger Pseudobewertungen. Da n beliebig gross gewählt werden kann, so folgt die Behauptung.

Dieses Beispiel widerlegt übrigens meine Vermutung (S. Seite 118 unten, im ersten Teil dieser Arbeit), dass mit einem Ring R auch der Ring aller Polynome in einer Unbestimmten x mit Koeffizienten aus R elementar sei.

Groningen, November 1935.