KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

Ein Analogon zu einem SCHNEIDERschen Satz

(Erste Mitteilung)

VON

KURT MAHLER

Reprinted from: Proceedings Vol. XXXIX, N°. 5, 1936

Mathematics. — *Ein Analogon zu einem* SCHNEIDER*schen Satz.* Von KURT MAHLER. (Erste Mitteilung.) (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of April 25, 1936).

In einer demnächst erscheinenden Arbeit (die mir der Verfasser liebenswürdigerweise bereits vor der Veröffentlichung zur Verfügung stellte) beweist TH. SCHNEIDER folgenden bemerkenswerten Satz:

Satz 1: *Ist ζ eine algebraische Zahl, μ eine Zahl > 2 und hat die Ungleichung*

$$\left|\frac{p}{q}-\zeta\right| \leqq q^{-\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

unendlichviele verschiedene Lösungen

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots \qquad (2 \leqq q_1 \leqq q_2 \leqq q_3 \leqq \ldots) \quad . \quad (2)$$

in gekürzten Brüchen mit positivem Nenner, so ist

$$\limsup_{\nu \to \infty} \frac{\log q_{\nu+1}}{\log q_\nu} = \infty. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Durch diesen Satz wird ein älteres und weniger weit gehendes Ergebnis von C. SIEGEL [1]) überholt.

Die vorliegende Arbeit gibt einen Beweis für den analogen Satz:

Satz 2: *Ist ζ eine algebraische Zahl, μ eine Zahl > 1 und hat die Ungleichung* (1) *unendlichviele Lösungen* (2) *in gekürzten Brüchen mit positiven Nennern, die allein durch endlichviele gegebenen Primzahlen teilbar sind, so gilt* (3). (Ein entsprechender Satz, bei dem gefordert wird, dass nicht die *Nenner*, sondern die *Zähler* allein durch die endlichvielen gegebenen Primzahlen teilbar sind, folgt hieraus für $\zeta \neq 0$ auf triviale Weise.)

Spezielle Fälle dieses Satzes stammen bereits von SCHNEIDER. Verlangt man, dass *Zähler und Nenner* der Lösungen von (1) beschränkte Primteiler haben, so besteht ein weiteres Analogon, diesmal sogar für $\mu > 0$. Dasselbe hat jedoch kein besonderes Interesse, denn es ist möglich, mit

---

1) C. SIEGEL, Ueber Näherungswerte algebraischer Zahlen, Math. Ann. **84**, 80—99 (1921).

Hilfe des THUE-SIEGELschen Satzes [2]) folgendes weitergehende Ergebnis zu beweisen:

Satz 3: *Ist ζ eine nichtverschwindende algebraische Zahl, μ eine positive Zahl, so gibt es höchstens endlichviele gekürzte Lösungen p/q von* (1), *für die pq allein durch endlichviele gegebenen Primzahlen teilbar ist.* (Für $\zeta = 0$ stimmt dies nicht.)

Es möge noch bemerkt werden, dass alle drei Sätze richtig bleiben, wenn man neben der Absolutbetragbewertung noch endlichviele p-adische Bewertungen berücksichtigt, also statt der Ungleichung (1) eine der beiden Ungleichungen

$$\prod_{\tau=1}^{t} \min\left(1, \left|\frac{p}{q} - \zeta_\tau\right|_{P_\tau}\right) \leqq \max(|p|, |q|)^{-\mu}$$

oder

$$\min\left(1, \left|\frac{p}{q} - \zeta\right|\right) \prod_{\tau=1}^{t} \min\left(1, \left|\frac{p}{q} - \zeta_\tau\right|_{P_\tau}\right) \leqq \max(|p|, |q|)^{-\mu}$$

betrachtet; dabei bezeichnen $P_1, P_2, \ldots, P_t$ endlichviele verschiedene Primzahlen, $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_t$ je eine reelle, P_1-adische, ..., P_t-adische Nullstelle desselben irreduziblen Polynoms mit rationalen Koeffizienten, und $|\alpha|_{P_\tau}$ den P_τ-adischen Wert der P_τ-adischen Zahl α.

Das erste Kapitel bringt den Beweis von Satz 2 und zwar im wesentlichen nach dem Verfahren von SCHNEIDER. Jedoch gelingt es mir, einen Teil seiner Ueberlegungen überflüssig zu machen und so insbesondere Rechnungen zu ersparen. Eine entsprechende Vereinfachung ist auch beim Beweis des SCHNEIDERschen Satzes 1 möglich; *alsdann kann man insbesondere ohne das Schubfachprinzip auskommen.* (Wie mir Herr SCHNEIDER mitteilte, war ihm ebenfalls bekannt, dass man seinen Satz 1 ohne Verwendung des Schubfachprinzips zeigen kann; aus seiner Mitteilung konnte ich jedoch nicht ersehen, ob er damit dieselbe Beweisänderung wie bei mir im Auge hatte.) — Im zweiten Kapitel wird Satz 3 mittels einer SIEGELschen Methode abgeleitet. Es schliesst mit zwei Bemerkungen über die Kettenbruch-Näherungsbrüche einer algebraischen Irrationalzahl.

KAPITEL 1.

Beweis von Satz 2.

§ 1. *Die Existenzannahme.*

Um Satz 2 zu beweisen, wird indirekt geschlossen und angenommen, der Satz sei falsch.

Es gebe somit eine unendliche Folge

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots \qquad (2 \leqq q_1 < q_2 < q_3 < \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

---

[2]) Siehe etwa: C. SIEGEL, Approximation algebraischer Zahlen, Math. Zeitschr. **10**, 173—213 (1921).

von gekürzten Brüchen, die der Ungleichung (1) genügen, deren Nenner allein durch endlichviele gegebenen, von einander verschiedenen Primzahlen $P_1, P_2, \ldots, P_t$ teilbar sind, und für die die Quotienten

$$\frac{\log q_{\nu+1}}{\log q_\nu}$$

beschränkt bleiben, also etwa sämtlich nicht grösser als die natürliche Zahl c sind. Für jede genügend grosse natürliche Zahl s existiert folglich mindestens ein Element $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ der Folge (4), so dass

$$s \leqq \log q_\nu < c\, s$$

ist

§ 2. *Eine Klasseneinteilung.*

Der Nenner q_ν jedes Gliedes der Folge (4) ist ein Potenzprodukt

$$q_\nu = P_1^{g_1} P_2^{g_2} \ldots . P_t^{g_t}$$

mit gewissen nichtnegativen ganzen rationalen Exponenten $g_1, g_2, \ldots, g_t$. Sei von jetzt ab ε eine positive Konstante, über die später verfügt wird, und f eine natürliche Zahl mit

$$f\varepsilon \geqq t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Zu der Produktdarstellung von q_ν lassen sich dann t eindeutig bestimmte nichtnegative ganze rationale Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_t$ angeben, so dass

$$q_\nu^{\frac{a_\tau - 1}{f}} < P_\tau^{g_\tau} \leqq q_\nu^{\frac{a_\tau}{f}} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, t), \quad \ldots . \quad (6)$$

daher

$$q_\nu^{\sum\limits_{\tau=1}^{t} \frac{a_\tau - 1}{f}} < q_\nu \leqq q_\nu^{\sum\limits_{\tau=1}^{t} \frac{a_\tau}{f}}$$

und folglich wegen (5)

$$f \leqq \sum_{\tau=1}^{t} a_\tau < (1+\varepsilon) f \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

ist. Das Zahlsystem $(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ hat somit nur eine endliche Anzahl, etwa T, Möglichkeiten. Wir nennen es den Charakter von $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ und fassen alle Glieder der Folge (4) mit diesem Charakter in eine Klasse

$$C = C(a_1, a_2, \ldots, a_t)$$

zusammen. Damit entsteht eine Verteilung dieser Folge auf T Klassen

$$C_1, C_2, \ldots, C_T.$$

§ 3. *Konstruktion von Lösungssystemen.*

Seien $k > 1$ und r_k zwei natürliche Zahlen, über die später verfügt wird; sei ferner $N = (k-1)\,T + 1$.

Zu jeder natürlichen Zahl s, die grösser als eine von k und r_k abhängige Schranke ist, kann man nach § 1 ein System $S(s, r_k)$ von N Elementen

$$\frac{p\,(l;\, s,\, r_k)}{q\,(l;\, s,\, r_k)} = \frac{p_\nu}{q_\nu}, \qquad \nu = \nu\,(l;\, s,\, r_k) \qquad (l = 0, 1, \ldots, N-1)$$

der Folge (4) mit

$$s\, r_k^{-3^l} \leqq \log q\,(l;\, s,\, r_k) < c\, s\, r_k^{-3^l} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

und also erst recht mit

$$\frac{1}{c}\, r_k^{3^{l''} - 3^{l'}} \leqq \frac{\log q\,(l';\, s,\, r_k)}{\log q\,(l'';\, s,\, r_k)} \leqq c\, r_k^{3^{l''} - 3^{l'}} \qquad (l', l'' = 0, 1, \ldots, N-1) \quad . \quad (9)$$

finden. Die Glieder dieses Systems verteilen sich auf die T Klassen $C_1, C_2, \ldots, C_T$; wegen $N > (k-1)\,T$ müssen folglich gewisse k von ihnen, etwa

$$\frac{p\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)}{q\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

mit den Indizes

$$l_\varkappa = l_\varkappa\,(s,\, r_k) \qquad (0 \leqq l_k < l_{k-1} < \ldots < l_2 < l_1 \leqq N-1)$$

in ein und derselben Klasse $C = C(s, r_k)$ liegen. Jedem System $S(s, r_k)$ werden auf diese Weise $k+1$ Symbole

$$C\,(s,\, r_k),\ l_1\,(s,\, r_k),\ l_2\,(s,\, r_k), \ldots,\ l_k\,(s,\, r_k)$$

zugeordnet. Die Gesamtheit dieser Symbole hat aber nur höchstens $N^k\, T$ Möglichkeiten. Also existiert eine unendliche Folge $\mathfrak{F}^\star$:

$$s = s^{(1)}, s^{(2)}, s^{(3)}, \ldots \qquad (s^{(1)} < s^{(2)} < s^{(3)} < \ldots)$$

von Zahlwerten für s, für die

$$C\,(s, r_k) = C\,(a_1, a_2, \ldots, a_t),\ l_1\,(s, r_k) = l_1,\ l_2(s, r_k) = l_2, \ldots,\ l_k\,(s, r_k) = l_k \quad . \quad (10)$$

wird, wo jetzt $a_1, a_2, \ldots, a_t$ und $l_1, l_2, \ldots, l_k$ nicht mehr von s abhängen. Aus $\mathfrak{F}^\star$ denken wir eine unendliche Teilfolge $\mathfrak{F}$:

$$s = s_1, s_2, s_3, \ldots \qquad (s_1 < s_2 < s_3 < \ldots)$$

von s-Werten ausgewählt, so dass die k Grenzwerte

$$\lim_{\substack{s \to \infty \\ s \text{ in } \mathfrak{F}}} r_k\, \frac{\log q\,(l_k;\, s,\, r_k)}{\log q\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)} = r_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \quad . \quad . \quad (11)$$

existieren; dies ist möglich auf Grund der Ungleichungen (9).

Die so bestimmten Grenzwerte genügen wegen (9) den Ungleichungen

$$\frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{c}\, r_k^{3^{l_\varkappa}-3^{l_k}+1} \leqslant r_\varkappa \leqslant c\, r_k^{3^{l_\varkappa}-3^{l_k}+1} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k).$$

Da $3^{l_k} \geqslant 1$, ferner nach Voraussetzung $l_\varkappa > l_{\varkappa+1}$, also $l_{\varkappa+1}+1 \leqslant l_\varkappa$ und somit

$$3^{l_\varkappa} - 3^{l_k} + 1 \geqslant 3\,(3^{l_{\varkappa+1}} - 3^{l_k} + 1) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1)$$

ist, so folgt

$$r_\varkappa \geqslant \frac{1}{c}\, r_k^{3^{l_\varkappa}-3^{l_k}+1} \geqslant \frac{1}{c}\, r_k^{3\,(3^{l_{\varkappa+1}}-3^{l_k}+1)} \geqslant \frac{1}{c}\left(\frac{r_{\varkappa+1}}{c}\right)^3 \geqslant \frac{(r_{\varkappa+1}+1)^3}{c^4\,(c+1)^3}.$$

Also gelten die Ungleichungen

$$r_1 \geqslant (r_2+1)^2,\ r_2 \geqslant (r_3+1)^2, \ldots,\ r_{k-2} \geqslant (r_{k-1}+1)^2,\ r_{k-1} \geqslant \frac{k-1}{\varepsilon}\,(r_k+1) \quad (12)$$

und erst recht deren Folgerungen

$$r_\varkappa \geqslant \frac{k-1}{\varepsilon} \prod_{\lambda=\varkappa+1}^{k} (r_\lambda+1) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1), \quad . \quad (13)$$

sobald r_k grösser als eine gewisse von c, k und ε abhängige natürliche Zahl c_1 ist. Dies werde von jetzt ab vorausgesetzt. Wir wollen ferner annehmen, dass $\varepsilon \leqq 1/2$ ist; dann gilt nach (11) für alle genügend grossen Elemente s der Folge $\mathfrak{F}$:

$$\frac{r_\varkappa}{1+\varepsilon} \leqslant r_k\, \frac{\log q\,(l_k;\, s,\, r_k)}{\log q\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)} \leqslant \frac{r_\varkappa}{1-\varepsilon} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k). \quad (14)$$

§ 4. *Bestimmung oberer Schranken für zwei Ausdrücke Λ und M.*

Bedeute Λ das Maximum aller Ausdrücke der Gestalt

$$\prod_{\varkappa=1}^{k-1} \left| \frac{p\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)}{q\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)} - \zeta \right|^{h_\varkappa - \tau_\varkappa} \cdot \left| \frac{p\,(l_k;\, s,\, r_k)}{q\,(l_k;\, s,\, r_k)} - \zeta \right|^{h_k},$$

wo $h_1, h_2, \ldots, h_k, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}$ alle ganzen rationalen Zahlen mit

$$h_1 \geqslant 0,\ h_2 \geqslant 0, \ldots, h_k \geqslant 0,\ \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{h_\varkappa}{r_\varkappa} \geqslant 1-\varepsilon,$$

$$0 \leqslant \tau_\varkappa \leqslant h_\varkappa, \quad 0 \leqslant \tau_\varkappa \leqslant \prod_{\lambda=\varkappa+1}^{k} (r_\lambda+1) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1)$$

durchlaufen. Wegen

$$\left| \frac{p\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)}{q\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)} - \zeta \right| \leqslant q\,(l_\varkappa;\, s,\, r_\varkappa)^{-\mu} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

ist Λ offenbar nicht grösser als das Maximum der Potenzprodukte

$$\prod_{\varkappa=1}^{k-1} q\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)^{-(h_\varkappa - \tau_\varkappa)\,\mu} \,.\, q\,(l_k;\, s,\, r_k)^{-h_k\,\mu}.$$

Aus (14) folgt somit

$$\Lambda \leqslant \left\{ q\,(l_k;\, s,\, r_k)^{(1-\varepsilon)\sum\limits_{\varkappa=1}^{k-1}\frac{h_\varkappa-\tau_\varkappa}{r_\varkappa}+\frac{h_k}{r_k}} \right\}^{-r_k\,\mu} \leqslant q\,(l_k;\, s,\, r_k)^{-(1-\varepsilon)\,r_k\,\mu\left\{\sum\limits_{\varkappa=1}^{k-1}\frac{h_\varkappa-\tau_\varkappa}{r_\varkappa}+\frac{h_k}{r_k}\right\}},$$

und da nach (13)

$$\tau_\varkappa \leqslant \frac{\varepsilon}{k-1}\, r_\varkappa, \quad \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \frac{\tau_\varkappa}{r_\varkappa} \leqslant \varepsilon, \quad \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \frac{h_\varkappa - \tau_\varkappa}{r_\varkappa} + \frac{h_k}{r_k} \geqslant (1-\varepsilon) - \varepsilon = 1 - 2\,\varepsilon$$

ist, so ergibt sich die Schranke

$$\Lambda \leqslant q\,(l_k;\, s,\, r_k)^{-(1-\varepsilon)(1-2\,\varepsilon)\,r_k\,\mu} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Sei weiter M das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} q\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)^{h_\varkappa},$$

wo die Indizes $h_1, h_2, \ldots, h_k$ alle ganzen rationalen Werte mit

$$h_1 \geqslant 0,\ h_2 \geqslant 0, \ldots, h_k \geqslant 0,\ \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{h_\varkappa}{r_\varkappa} \leqslant 1$$

durchlaufen. Nach Voraussetzung ist jede der Zahlen

$$q\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

allein durch die Primzahlen $P_1, P_2, \ldots, P_t$ teilbar; da die Brüche

$$\frac{p\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)}{q\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots k)$$

aber nach der Konstruktion in § 3 sämtlich zur Klasse $C(a_1, a_2, \ldots, a_t)$ gehören, so kann nach (6) die höchste in $q(l_\varkappa;\, s,\, r_k)$ aufgehende Potenz von P_τ nicht grösser als

$$q\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)^{\frac{a_\tau}{f}}$$

sein. Wegen (14) ist demnach die höchste Potenz von P_τ, durch die M teilbar ist, höchstens gleich

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} q\,(l_\varkappa;\, s,\, r_k)^{\frac{a_\tau}{f}\,h_\varkappa} \leqslant q\,(l_k;\, s,\, r_k)^{\frac{a_\tau}{f}\,(1+\varepsilon)\,r_k \sum\limits_{\varkappa=1}^{k}\frac{h_\varkappa}{r_\varkappa}} \leqslant q\,(l_k;\, s,\, r_k)^{\frac{a_\tau}{f}\,(1+\varepsilon)\,r_k},$$

und da auch M keine anderen Primteiler als $P_1, P_2, \ldots, P_t$ haben kann, so ergibt sich wegen (7) die obere Schranke

$$M \leqslant \prod_{\tau=1}^{t} q\,(l_k;\, s,\, r_k)^{\frac{a_\tau}{f}\,(1+\varepsilon)\,r_k} \leqslant q\,(l_k;\, s,\, r_k)^{(1+\varepsilon)^2 r_k} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

§ 5. *Ein Hilfssatz über Gitterpunkte.*

Seien $r_1, r_2, \ldots, r_k$ die in § 3 konstruierten positiven Zahlen. Wir verstehen unter n den Grad der untersuchten algebraischen Zahl ζ und setzen von jetzt ab ausser der Ungleichung $r_k \geqq c_1$ noch voraus, dass

$$k \geqq \frac{\log \frac{1}{2n}}{\log \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \quad r_k \geqq \frac{k}{2\varepsilon}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

wegen (12) also

$$r_\varkappa \geqq \frac{k}{2\varepsilon} \text{ für } \varkappa = 1, 2, \ldots, k \text{ und folglich } \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{1}{r_\varkappa} \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots \quad (18)$$

ist.

Sei $M(v)$ für beliebiges positives v die Menge aller Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ im k-dimensionalen Raum, die den Ungleichungen

$$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, \ldots, x_k \geqq 0, \quad \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{x_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq v$$

genügen, $J(v)$ der Rauminhalt von $M(v)$ und $G(v)$ die Anzahl der Gitterpunkte im Innern oder auf dem Rande von $M(v)$. Ordnet man jedem solchen Gitterpunkte $(h_1, h_2, \ldots, h_k)$ den Einheitswürfel

$$h_1 \leqq x_1 \leqq h_1 + 1, \ h_2 \leqq x_2 \leqq h_2 + 1, \ldots, \ h_k \leqq x_k \leqq h_k + 1$$

zu, so erfüllen diese Würfel zusammen ein Raumstück, dessen Inhalt gerade gleich $G(v)$ ist. Dieses Raumstück enthält offenbar alle Punkte von $M(v)$ und ist seinerseits ganz in $M\left(v + \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{1}{r_\varkappa}\right)$ enthalten; folglich ist

$$J(v) \leqq G(v) \leqq J\left(v + \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{1}{r_\varkappa}\right).$$

Nach einer bekannten Integralformel ist ferner

$$J(v) = \frac{r_1 r_2 \ldots r_k}{k!} v^k,$$

und somit gelten die Ungleichungen

$$\frac{r_1 r_2 \ldots r_k}{k!} v^k \leqq G(v) \leqq \frac{r_1 r_2 \ldots r_k}{k!} \left(v + \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{1}{r_\varkappa}\right)^k.$$

Hieraus folgt speziell wegen (18)

$$G(1-\varepsilon) \leqq \frac{r_1 r_2 \ldots r_k}{k!} \left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k \leqq \frac{r_1 r_2 \ldots r_k}{k!} \frac{1}{2n} \text{ und } G(1) \geqq \frac{r_1 r_2 \ldots r_k}{k!}$$

und damit schliesslich: [3])

$$G(1-\varepsilon) < \frac{G(1)}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

§ 6. *Konstruktion des Näherungspolynoms.*

Die algebraische Zahl ζ, die wir untersuchen, sei Nullstelle des Polynoms n-ten Grades mit rationalen Koeffizienten

$$f(z) = z^n + f_1 z^{n-1} + \ldots + f_{n-1} z + f_n.$$

Damit ein Polynom $F(z)$ durch $f(z)$ teilbar ist, müssen seine Koeffizienten offenbar gewissen n homogenen linearen Gleichungen mit rationalen Zahlkoeffizienten genügen.

Sei nun $R(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ ein Polynom in k Unbestimmten $z_1, z_2, \ldots, z_k$ von der speziellen Gestalt

$$\left. R(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \sum_{\substack{h_1 \geq 0 \\ \sum\limits_{\varkappa=1}^{k} \frac{h_\varkappa}{r_\varkappa} \leq 1}} \ldots \sum_{h_k \geq 0} R_{h_1 h_2 \ldots h_k} z_1^{h_1} z_2^{h_2} \ldots z_k^{h_k}, \right\} \quad \ldots \quad (20)$$

und sei zur Abkürzung

$$R_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k} R(z_1, z_2, \ldots, z_k)}{\lambda_1!\, \lambda_2! \ldots \lambda_k!\; \partial z_1^{\lambda_1} \partial z_2^{\lambda_2} \ldots \partial z_k^{\lambda_k}}.$$

Damit die $G(1-\varepsilon)$ Polynome

$$R_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_k}(z, z, \ldots, z) \text{ mit } \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0, \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{\lambda_\varkappa}{r_\varkappa} \leq 1-\varepsilon \quad (21)$$

sämtlich durch $f(z)$ teilbar sind, müssen die $G(1)$ Koeffizienten $R_{h_1 h_2 \ldots h_k}$ von $R(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ nach der vorigen Bemerkung $n \cdot G(1-\varepsilon)$, wegen (19) also weniger als $G(1)$ homogenen linearen Gleichungen mit rationalen Zahlkoeffizienten genügen. Diese Gleichungen lassen sich daher durch ganze rationale Werte für die $R_{h_1 h_2 \ldots h_k}$, die nicht alle Null sind, befriedigen und es folgt damit die Existenz eines Polynoms (20), das nicht identisch verschwindet, dessen Koeffizienten ganz rational sind und für das die zugeordneten Polynome (21) sämtlich durch $f(z)$ teilbar sind.

Schluss des Beweises in der 2. Mitteilung.

[3]) SCHNEIDER benutzt beim Beweis von Satz 1 einen tieferen Hilfssatz über Gitterpunkte im Innern eines Würfelteils. Will man aber, wie hier, allein Satz 2 zeigen, so leistet der elementarere Satz des Textes alles Gewünschte; doch kann man natürlich auch alle Ueberlegungen auf den SCHNEIDERschen Hilfssatz stützen.