KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

Ein Analogon zu einem SCHNEIDERschen Satz

(Zweite Mitteilung)

VON

KURT MAHLER

Reprinted from: Proceedings Vol. XXXIX, N⁰. 6, 1936

Mathematics. — *Ein Analogon zu einem* SCHNEIDER*schen Satz.* Von KURT MAHLER. (Zweite Mitteilung). (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of May 23, 1936)

Schluss des Beweises von Satz 2.

§ 7. *Die* SCHNEIDER*sche Identität.*

Das so bestimmte Polynom $R(z_1, z_2, \dots, z_k)$ ist in den Veränderlichen $z_1, z_2, \dots, z_k$ der Reihe nach höchstens von den Graden $r_1, r_2, \dots, r_k$. Es lässt sich auf die Gestalt

$$R(z_1, z_2, \dots, z_k) = \sum_{h_1=0}^{r_1} z_1^{h_1} \mathfrak{R}_{h_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k)$$

bringen, wo die $\mathfrak{R}_{h_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k)$ $(h_1 = 0, 1, \dots, r_1)$ Polynome in $z_2, z_3, \dots, z_k$ der Reihe nach höchstens von den Graden $r_2, r_3, \dots, r_k$ und nicht alle identisch Null sind. Sei von ihnen eine gewisse Anzahl, etwa $t_1 + 1$ mit $t_1 \geqq 0$, linear unabhängig, und seien

$$R_{\tau_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k) \not\equiv 0 \qquad (\tau_1 = 0, 1, \dots, t_1)$$

diese unabhängigen Polynome. Da in diesen Polynomen nur höchstens $\prod_{\varkappa=2}^{k}(r_\varkappa + 1)$ verschiedene Potenzprodukte $z_2^{h_2} z_3^{h_3} \dots z_k^{h_k}$ auftreten, so ist gewiss

$$t_1 + 1 \leqq \prod_{\varkappa=2}^{k}(r_\varkappa + 1).$$

Die $\mathfrak{R}_{h_1}^{(1)}$ lassen sich durch die $R_{\tau_1}^{(1)}$ in der Form

$$\mathfrak{R}_{h_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k) = \sum_{\tau_1=0}^{t_1} \alpha_{h_1\tau_1}^{(1)} R_{\tau_1}^{(1)}(z_2, z_3, \dots, z_k) \qquad (h_1 = 0, 1, \dots, r_1)$$

mit konstanten Koeffizienten $\alpha_{h_1\tau_1}^{(1)}$ ausdrücken; die Matrix

$$\left(\alpha_{h_1\tau_1}^{(1)}\right)_{\substack{h_1=0,1,\dots,r_1\\ \tau_1=0,1,\dots,t_1}}$$

hat dabei offenbar den genauen Rang $t_1 + 1$. Setzen wir

$$p_{\tau_1}^{(1)}(z_1) = \sum_{h_1=0}^{r_1} \alpha_{h_1\tau_1}^{(1)} z_1^{h_1} \qquad (\tau_1 = 0, 1, \dots, t_1),$$

so sind demnach diese Polynome in z_1 linear unabhängig, so dass ihre WRONSKI-Determinante

$$\triangle^{(1)}(z_1) = \left| \frac{d^{\tau_1} p^{(1)}_{\tau_1}(z_1)}{\sigma_1 !\, d z_1^{\sigma_1}} \right|_{\sigma_1, \tau_1 = 0, 1, \ldots, t_1}$$

nicht identisch verschwinden kann. Es ist aber

$$R(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \sum_{\tau_1=0}^{t_1} p^{(1)}_{\tau_1}(z_1)\, R^{(1)}_{\tau_1}(z_2, z_3, \ldots, z_k)$$

und folglich auch

$$\frac{\partial^{\sigma_1} R(z_1, z_2, \ldots, z_k)}{\sigma_1 !\, \partial z_1^{\sigma_1}} = \sum_{\tau_1=0}^{t_1} \frac{d^{\sigma_1} p^{(1)}_{\tau_1}(z_1)}{\sigma_1 !\, d z_1^{\sigma_1}} R^{(1)}_{\tau_1}(z_2, z_3, \ldots, z_k) \qquad (\sigma_1 = 0, 1, \ldots, t_1).$$

Diese Beziehungen lassen sich als ein System von $t_1 + 1$ linearen Gleichungen für die $t_1 + 1$ Ausdrücke $R^{(1)}_{\tau_1}(z_2, z_3, \ldots, z_k)$ mit der Determinante $\triangle^{(1)}(z_1)$ auffassen; man kann dasselbe z.B. nach

$$R^{(1)}(z_2, z_3, \ldots, z_k) = R^{(1)}_0(z_2, z_3, \ldots, z_k)$$

auflösen und bekommt dann die Gleichung

$$\triangle^{(1)}(z_1)\, R^{(1)}(z_2, z_3, \ldots, z_k) = \sum_{\tau_1=0}^{t_1} \triangle^{(1)}_{\tau_1}(z_1) \frac{\partial^{\tau_1} R(z_1, z_2, \ldots, z_k)}{\tau_1 !\, \partial z_1^{\tau_1}}, \qquad (21)$$

wobei die $\triangle^{(1)}_{\tau_1}(z_1)$ $(\tau_1 = 0, 1, \ldots, t_1)$ gewisse Polynome und zwar bis auf das Vorzeichen gerade Unterdeterminanten von $\triangle^{(1)}(z_1)$ sind.

Da $R^{(1)}(z_2, z_3, \ldots, z_k)$ nicht identisch verschwindet und analoge Gradeigenschaften wie $R(z_1, z_2, \ldots, z_k)$ besitzt, kann man es dem gleichen Verfahren unterwerfen und somit eine Beziehung

$$\triangle^{(2)}(z_2)\, R^{(2)}(z_3, z_4, \ldots, z_k) = \sum_{\tau_2=0}^{t_2} \triangle^{(2)}_{\tau_2}(z_2) \frac{\partial^{\tau_2} R^{(1)}(z_2, z_3, \ldots, z_k)}{\tau_2 !\, \partial z_2^{\tau_2}} . \qquad (22)$$

herleiten, wo jetzt

$$R^{(2)}(z_3, z_4, \ldots, z_k) \quad , \quad \triangle^{(2)}(z_2) \quad , \quad \triangle^{(2)}_{\tau_2}(z_2)$$

gewisse Polynome sind, von denen die beiden ersten nicht identisch verschwinden, das erste der Reihe nach höchstens von den Graden $r_3, r_4, \ldots, r_k$ in $z_3, z_4, \ldots, z_k$ ist und wo die natürliche Zahl $t_2 + 1$ der Ungleichung

$$t_2 + 1 \leq \prod_{\varkappa=3}^{k} (r_\varkappa + 1)$$

genügt.

So kann man fortfahren und ein System von Identitäten

$$\left.\begin{array}{r}\triangle^{(\varkappa)}(z_\varkappa)\,R^{(\varkappa)}(z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \ldots, z_k) = \sum\limits_{\tau_\varkappa=0}^{t_\varkappa} \triangle^{(\varkappa)}_{\tau_\varkappa}(z_\varkappa)\,\dfrac{\partial^{\tau_\varkappa} R^{(\varkappa-1)}(z_\varkappa, z_{\varkappa+1}, \ldots, z_k)}{\tau_\varkappa!\,\partial z_\varkappa^{\tau_\varkappa}} \\ (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1)\end{array}\right\} \quad (23)$$

herleiten; dabei sind dann

$$R^{(\varkappa)}(z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \ldots, z_k) \text{ und } \triangle^{(\varkappa)}(z_\varkappa) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1)$$

gewisse nicht identisch verschwindende Polynome,

$$\triangle^{(\varkappa)}_{\tau_\varkappa}(z_\varkappa) \qquad \begin{pmatrix}\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1 \\ \tau_\varkappa = 0, 1, \ldots, t_\varkappa\end{pmatrix}$$

gewisse andere Polynome, und $t_1 + 1,\ t_2 + 1, \ldots, t_{k-1} + 1$ gewisse natürliche Zahlen, die den Ungleichungen

$$t_\varkappa + 1 \leqq \prod_{\lambda=\varkappa+1}^{k} (r_\lambda + 1) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1) \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

genügen. Setzen wir noch der Gleichmässigkeit halber

$$R^{(k-1)}(z_k) = \triangle^{(k)}(z_k)$$

und eliminieren wir die Polynome $R^{(\varkappa)}(z_{\varkappa+1}, z_{\varkappa+2}, \ldots, z_k)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1)$ aus den Identitäten (23), so folgt schliesslich die SCHNEIDERsche identische Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\prod\limits_{\varkappa=1}^{k} \triangle^{(\varkappa)}(z_\varkappa) = \\ \quad = \sum\limits_{\tau_1=0}^{t_1} \sum\limits_{\tau_2=0}^{t_2} \cdots \sum\limits_{\tau_{k-1}=0}^{t_{k-1}} \triangle^{(1)}_{\tau_1}(z_1) \ldots \triangle^{(k-1)}_{\tau_{k-1}}(z_{k-1})\, R_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_{k-1}}(z_1, z_2, \ldots, z_k).\end{array}\right\} \quad (25)$$

(Statt dieser Identität lässt sich auch eine ähnliche andere Identität benutzen, die C. SIEGEL in seiner Arbeit [1]) ableitet und verwendet).

§ 8. *Schluss des Beweises.*

Das in § 6 konstruierte Polynom R lässt sich an der Stelle $z_1 = z_2 = \ldots = z_k = z$ in die endliche TAYLORreihe

$$R(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \sum_{h_1=0}^{r_1} \cdots \sum_{h_k=0}^{r_k} R_{h_1 h_2 \ldots h_k}(z, z, \ldots, z)\ (z_1 - z)^{h_1} (z_2 - z)^{h_2} \ldots (z_k - z)^{h_k}$$

entwicklen; seine partielle Ableitung

$$R_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_{k-1}0}(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \frac{\partial^{\tau_1+\ldots+\tau_{k-1}} R(z_1, z_2, \ldots, z_k)}{\tau_1! \ldots \tau_{k-1}!\,\partial z_1^{\tau_1} \ldots \partial z_{k-1}^{\tau_{k-1}}}$$

besitzt daher die Reihenentwicklung

$$R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1} 0}(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \sum_{h_1=0}^{r_1} \ldots \sum_{h_k=0}^{r_k} R_{h_1 h_2 \ldots h_k}(z, z, \ldots, z) \binom{h_1}{\tau_1} \ldots \binom{h_{k-1}}{\tau_{k-1}} \times$$

$$\times (z_1 - z)^{h_1 - \tau_1} \ldots (z_{k-1} - z)^{h_{k-1} - \tau_{k-1}} (z_k - z)^{h_k}.$$

Wird speziell für z die Nullstelle ζ von $f(z)$ eingesetzt, so verschwinden nach § 6 alle Zahlen

$$R_{h_1 h_2 \ldots h_k}(\zeta, \zeta, \ldots, \zeta) \text{ mit } h_1 \geqq 0, h_2 \geqq 0, \ldots, h_k \geqq 0, \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{h_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq 1 - \varepsilon$$

und man erhält die Formel:

$$\left.\begin{aligned} R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1} 0}(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \sum_{\substack{h_1=0 \\ \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{h_\varkappa}{r_\varkappa} \geqq 1-\varepsilon}}^{r_1} \ldots \sum_{h_k=0}^{r_k} R_{h_1 \ldots h_k}(\zeta, \zeta, \ldots, \zeta) \times \\ \times \binom{h_1}{\tau_1} \ldots \binom{h_{k-1}}{\tau_{k-1}} (z_1 - \zeta)^{h_1 - \tau_1} \ldots (z_{k-1} - \zeta)^{h_{k-1} - \tau_{k-1}} (z_k - \zeta)^{h_k}. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Durch direktes Differenzieren der Gleichung (20) erhält man ausserdem:

$$\left.\begin{aligned} R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1} 0}(z_1, z_2, \ldots z_k) = \sum_{\substack{h_1 \geqq 0 \\ \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{h_\varkappa}{r_\varkappa} \leqq 1}} \ldots \sum_{h_k \geqq 0} R_{h_1 \ldots h_k} \times \\ \times \binom{h_1}{\tau_1} \ldots \binom{h_{k-1}}{\tau_{k-1}} z_1^{h_1 - \tau_1} \ldots z_{k-1}^{h_{k-1} - \tau_{k-1}} z_k^{h_k}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (27)$$

Von jetzt ab sei

$$\left.\begin{aligned} (1-\varepsilon)(1-2\varepsilon)\mu > (1+\varepsilon)^2, \ \varepsilon \leqq \tfrac{1}{2}, \\ k \geqq \frac{\log \frac{1}{2n}}{\log\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \ r_k \geqq \max\left(c_1 + 1, \frac{k}{2\varepsilon}\right); \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

die erste Ungleichung lässt sich wegen $\mu > 1$ befriedigen, indem man ε hinreichend klein nimmt. In die vorigen Polynome setzen wir für $z_1, z_2, \ldots, z_k$ der Reihe nach die Zahlwerte

$$z_\varkappa^{(s)} = \frac{p(l_\varkappa; s, r_k)}{q(l_\varkappa; s, r_k)} \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k) \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (29)$$

ein; s schliesslich durchlaufe alle genügend grossen Elemente der Folge $\mathfrak{F}$. Wegen (8) ist dann offenbar jedes einzelne $z_\varkappa^{(s)}$ für höchstens endlichviele s aus $\mathfrak{F}$ gleich einer festen Zahl: Folglich muss für alle genügend grossen s

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} \triangle^{(\varkappa)} (z_{\varkappa}^{(s)}) \neq 0$$

sein; aus der SCHNEIDERschen Identität (25) folgt somit die Ungleichung

$$R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1} 0} (z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \ldots, z_k^{(s)}) \neq 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (30)$$

für ein gewisses Indexsystem $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}$ mit

$$0 \leq \tau_{\varkappa} \leq t_{\varkappa} < \prod_{\lambda=\varkappa+1}^{k} (r_{\lambda} + 1).$$

Setzen wir nun

$$\Gamma = \sum_{\substack{h_1=0 \\ \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{h_\varkappa}{r_\varkappa} \geq 1-\varepsilon}}^{r_1} \cdots \sum_{h_k=0}^{r_k} | R_{h_1 \ldots h_k} (\zeta, \zeta, \ldots, \zeta) | \, 2^{r_1 + \ldots + r_{k-1}},$$

so dass also Γ von s unabhängig wird, beachten wir ferner die Ungleichung

$$\binom{h}{\tau} \leq \sum_{\tau=0}^{h} \binom{h}{\tau} = 2^h,$$

so folgt offenbar aus (26):

$$| R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1} 0} (z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \ldots, z_k^{(s)}) | \leq \Gamma \Lambda,$$

wo Λ die gleiche Bedeutung wie in § 4 hat, und also ist nach (15) für alle genügend grossen s aus $\mathfrak{F}$:

$$| R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1} 0} (z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \ldots, z_k^{(s)}) | \leq \Gamma q (l_k; s, r_k)^{-(1-\varepsilon)(1-2\varepsilon) r_k \mu} \quad . \quad . \qquad (A)$$

Weiter folgt aus (27), dass

$$R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1} 0} (z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \ldots, z_k^{(s)})$$

eine rationale Zahl ist, deren Nenner in der natürlichen Zahl M aufgeht, wo M die gleiche Bedeutung wie in § 4 hat. Da aber für alle hinreichend grossen s aus $\mathfrak{F}$ diese rationale Zahl nicht Null ist nach (30), so folgt die Ungleichung

$$| R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1} 0} (z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \ldots, z_k^{(s)}) | \geq \frac{1}{M},$$

und folglich muss wegen (16) für alle hinreichend grossen s aus $\mathfrak{F}$

$$| R_{\tau_1 \ldots \tau_{k-1} 0} (z_1^{(s)}, z_2^{(s)}, \ldots, z_k^{(s)}) | \geq q (l_k; s, r_k)^{-(1+\varepsilon)^2 r_k} . \quad . \quad . \quad . \qquad (B)$$

sein.

Offenbar widersprechen (A) und (B) einander wegen der ersten Ungleichung (28), sobald s und damit $q(l_k;\, s, r_k)$ eine gewisse Grenze übersteigt: Die in § 1 gemachte Existenzannahme ist also falsch und Satz 2 muss wahr sein.

KAPITEL 2.

Beweis von Satz 3.

§ 9. *Ersetzung von ζ durch eine algebraische Zahl höheren Grades.* Sei ζ eine von Null verschiedene und sogar ohne Einschränkung der Allgemeinheit positive algebraische Zahl n-ten Grades; seien ferner

$$P_1, P_2, \ldots, P_t \text{ und } Q_1, Q_2, \ldots, Q_u$$

$t+u$ ungleiche Primzahlen. Wir betrachten Brüche p/q, deren Zähler

$$p = P_1^{h_1} P_2^{h_2} \ldots P_t^{h_t} \qquad (31)$$

ein reines Potenzprodukt der Zahlen P_τ und deren Nenner

$$q = Q_1^{k_1} Q_2^{k_2} \ldots Q_u^{k_u} \qquad (32)$$

ein reines Potenzprodukt der Zahlen Q_υ ist, die ζ möglichst gut approximieren; nur werde im Ausnahmefall, dass ζ rational ist, der höchstens einzelne Bruch dieser Form, der genau gleich ζ ist, ausgeschlossen.

Bedeute r eine sehr grosse Primzahl. Wegen (31) und (32) lassen sich p und q in der Form

$$p = p_0 p_1^r, \quad q = q_0 q_1^r \qquad (33)$$

schreiben, wo

$$p_0 = P_1^{h_1 - \left[\frac{h_1}{r}\right] r} \ldots P_t^{h_t - \left[\frac{h_t}{r}\right] r}, \qquad q_0 = Q_1^{k_1 - \left[\frac{k_1}{r}\right] r} \ldots Q_u^{k_u - \left[\frac{k_u}{r}\right] r}$$

und

$$p_1 = P_1^{\left[\frac{h_1}{r}\right]} \ldots P_t^{\left[\frac{h_t}{r}\right]}, \qquad q_1 = Q_1^{\left[\frac{k_1}{r}\right]} \ldots Q_u^{\left[\frac{k_u}{r}\right]}$$

ist; p_0 und q_0 können hiernach also nur eine endliche, allein von r abhängige Anzahl von Werten annehmen. Bedeutet

$$Z = \sqrt[r]{\frac{q_0}{p_0}\zeta}$$

den reellen Wert dieser Wurzel, so hat folglich auch Z nur eine endliche, allein von r abhängige Anzahl von Möglichkeiten und ist überdies algebraisch genau vom Grad nr. Die anderen Werte des Wurzelzeichens sind nichtreell. Wegen

$$\frac{p}{q} - \zeta = \frac{p_0}{q_0} \frac{\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^r - Z^r}{\frac{p_1}{q_1} - Z} \left(\frac{p_1}{q_1} - Z\right)$$

konvergiert $\frac{p_1}{q_1}$ gegen Z, wenn $\frac{p}{q}$ gegen ζ strebt; gleichzeitig konvergiert

$$\frac{\left(\frac{p_1}{q_1}\right)^r - Z^r}{\frac{p_1}{q_1} - Z}$$

gegen r. Folglich ist für alle hinreichend nahe bei ζ liegenden Brüche $\frac{p}{q}$

$$\left|\frac{p}{q} - \zeta\right| \geqq c_r \left|\frac{p_1}{q_1} - Z\right|, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

wo c_r eine positive Konstante bezeichnet, die nur von r abhängt. Ausserdem ist offenbar auch

$$q \leqq c'_r\, q_1^r \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

wo c'_r ebenfalls nur von r abhängt und positiv ist.

§ 10. *Abschluss des Beweises: Anwendung des* SIEGEL*schen Satzes.*

Da Z algebraisch vom Grad $n\,r$ ist, so hat nach dem THUE-SIEGELschen Satz in der SIEGELschen Verschärfung [4]) die Ungleichung

$$\left|\frac{p_1}{q_1} - Z\right| \leqq C\, q_1^{-2\sqrt{nr}}$$

für jede pos tive Konstante C nur endlichviele Lösungen in gekürzten Brüchen $\frac{p_1}{q_1}$, wobei die Primteiler von p_1 und q_1 sogar gar keiner Beschränkung unterworfen sind. Wählen wir

$$C = c_r^{-1}\, c_r'^{\,-2\sqrt{\frac{n}{r}}},$$

und beachten wir die beiden Ungleichungen (34) und (35), berücksichtigen wir ferner, dass Z eine allein von r abhängige Anzahl verschiedener Werte haben kann, so folgt also, dass die Ungleichung

$$\left|\frac{p}{q} - \zeta\right| \leqq q^{-2\sqrt{\frac{n}{r}}}$$

nur endlichviele Lösungen p/q mit Zählern und Nennern der Form (31) und (32) haben kann. Da $2\sqrt{\frac{n}{r}}$ für grosses r beliebig klein ist, folgt damit Satz 3.

---

[4]) Siehe die Arbeit [2]). Die Beweismethode in § 9—10 ist nicht neu und stammt von C. SIEGEL, der sie mir vor etwa 10 Jahren mitteilte. Auch Satz 3 selbst ist wohl nicht neu, doch konnte ich ihn nirgends explizit formuliert finden.

§ 11. *Anwendung von Satz 2 und Satz 3 auf die Kettenbruch-Näherungsbrüche einer algebraischen Irrationalzahl.*

Sei von jetzt ab ζ eine reelle algebraische Irrationalzahl,

$$\zeta = a_0 + \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots$$

ihr regelmässiger Kettenbruch, und

$$\frac{p_{-1}}{q_{-1}}, \frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots$$

die Folge der zugehörigen Kettenbruch-Näherungsbrüche. Nach dem LIOUVILLEschen Satz oder auch nach dem THUEschen Satz liegen die Quotienten

$$\frac{\log q_{\nu+1}}{\log q_\nu}$$

von $\nu = 2$ ab alle unterhalb einer Konstanten. Man kann also Satz 2 anwenden und erhält folgendes Resultat:

„*Es gibt eine unendliche Teilfolge*

$$\frac{p_{\nu_1}}{q_{\nu_1}}, \frac{p_{\nu_2}}{q_{\nu_2}}, \frac{p_{\nu_3}}{q_{\nu_3}}, \ldots$$

von Kettenbruch-Näherungsbrüchen an ζ, so dass mit wachsendem Index die grösste im Nenner aufgehende Primzahl über alle Grenzen wächst".

Zum Beweis genügt es, $\mu = 2$ zu nehmen und zu beachten, dass

$$\left| \frac{p_\nu}{q_\nu} - \zeta \right| < q_\nu^{-2}$$

ist.

Ersetzt man ζ durch $\frac{1}{\zeta}$, so gelangt man im Fall $\zeta \neq 0$ zu einem analogen Satz für die Näherungs-Zähler; ferner kann man ein ähnliches Resultat auch für die Ausdrücke

$$a p_\nu + b q_\nu$$

aussprechen, wenn a und b irgend zwei ganze rationale Zahlen bedeuten.

Wendet man auf die Näherungsbrüche nicht Satz 2, sondern Satz 3 an und zwar ebenfalls mit dem Wert $\mu = 2$, so ergibt sich:

„*Mit wachsendem Index strebt die grösste in $p_\nu q_\nu$ aufgehende Primzahl gegen Unendlich*".

Nachtrag: Zur Einleitung dieser Arbeit ist nachzutragen, dass die SCHNEIDERsche Arbeit unter dem Titel: „*Ueber die Approximation algebraischer Zahlen*" in Band 175 des Journals für die reine und angewandte Mathematik etwa im Juli dieses Jahres erscheint.

Es werde ferner erwähnt, dass die Sätze 1 und 2 einer Verallgemeinerung auf endliche Systeme algebraischer Zahlen fähig sind (bei Satz 3 ist die entsprechende Verallgemeinerung trivial). Z.B. gilt statt Satz 1 folgender allgemeinere Satz:

„Sei $\mu > 2$ eine Konstante; seien ferner $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$ endlichviele algebraische Zahlen und

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots \qquad (2 \leqq q_1 \leqq q_2 \leqq q_3 \leqq \ldots)$$

unendlichviele gekürzte oder ungekürzte Brüche mit wachsendem positiven Nenner, die der Ungleichung

$$\min_{\nu=1,2,\ldots,N} \left(\left| \frac{p_\lambda}{q_\lambda} - \zeta_\nu \right| \right) \leqq q_\lambda^{-\mu}$$

genügen. Dann ist

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \frac{\log q_{\lambda+1}}{\log q_\lambda} = \infty \text{ "}.$$

Eine analoge Verallgemeinerung gilt für Satz 2. Man zeigt diese beiden Sätze mit denselben Hilfsmitteln wie in dieser Arbeit und zwar fast ohne Aenderung des Beweises.

Groningen, 7. März 1936.