KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen

VON

KURT MAHLER

Reprinted from: Proceedings Vol. XL, N°. 5, 1937

Mathematics. — *Arithmetische Eigenschaften einer Klasse von Dezimalbrüchen* von KURT MAHLER in Krefeld. (Communicated by Prof. J. G. VAN DER CORPUT).

(Communicated at the meeting of April 24, 1937).

Da über die Dezimalbruchentwicklung der klassischen transzendenten Zahlen, z.B. e und π, auch heute noch fast nichts bekannt ist [1]), so hat es ein gewisses Interesse, spezielle Dezimalbrüche zu konstruieren, deren Transzendenz sich zeigen lässt, ohne trivial zu sein. Ich behandle hier Dezimalbrüche folgender Gestalt: Unter $f(k)$ werde ein ganzwertiges nichtkonstantes Polynom verstanden, das für $k \geqq 1$ positiv ist und mit k gegen $+\infty$ strebt. Alsdann bedeute σ den Dezimalbruch, der entsteht, wenn hinter das Komma der Reihe nach nacheinander die dezimal dargestellten natürlichen Zahlen $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... hingeschrieben werden; z.B. wird also so dem Polynom $f(k) = \frac{1}{2}(k^2 + k)$ der Dezimalbruch

$$0{,}1\ 3\ 6\ 10\ 15\ 21\ 28\ 36\ 45\ 55\ 66\ 78\ 91\ 105\ 120\ldots\ldots$$

zugeordnet. Für alle Zahlen σ dieser Gestalt wird bewiesen:

„*σ ist transzendent, aber keine* LIOUVILLE-*Zahl.*"

Ein ganz gleichlautendes Resultat gilt auch noch, wenn statt solcher Dezimalbrüche analog gebildete Brüche in bezug auf eine beliebige Zahlsystem-Basis $q \geqq 2$ betrachtet werden; darum wird in der vorliegenden Arbeit sogleich der Fall eines allgemeinen natürlichen $q \geqq 2$ zugrunde gelegt. Jedoch mache ich die Annahme, dass $f(x)$ für alle reellen $x \geqq 1$ monoton im strengen Sinn zunimmt, weil dies die Betrachtungen wesentlich vereinfacht. Hierin liegt aber nur eine scheinbare Einschränkung; lässt man nämlich endlichviele Anfangsziffern von σ fort, was auf eine ganze lineare Transformation von σ mit rationalen Koeffizienten hinauskommt, so ist diese Forderung für die Folge der Restziffern von selbst erfüllt.

Der Beweis der beiden Aussagen über σ beruht wesentlich auf einer

---

[1]) Wegen einiger elementarer Aussagen vergl. eine demnächst in Mathematica *B* (Zutphen) erscheinende Note des Verfassers. Dort wird auch schon das Ergebnis dieser Arbeit im Spezialfall $f(x) = x$ gezeigt.

auch an sich merkwürdigen Reihenentwicklung (A) für diese Zahl. Indem man diese Reihe nach beliebig vielen Gliedern abbricht, erhält man eine Folge von Brüchen, die sehr schnell gegen σ konvergieren. Die Nenner dieser Brüche sind bis auf einen Faktor geringerer Grössenordnung reine Potenzen von q; mittels eines wichtigen neuen Satzes von SCHNEIDER kann hieraus die Transzendenz von σ hergeleitet werden. Dass σ keine LIOUVILLE-Zahl ist, ergibt sich schliesslich direkt aus einem Irrationalitätsmass (B) für σ, das leicht aus den Eigenschaften seiner Näherungsbrüche folgt.

1. Sei $f(x)$ ein ganzwertiges Polynom in x genau vom Grad $m \geqslant 1$, das für alle $x \geqslant 1$ selbst $\geqslant 1$ ist und monoton im strengen Sinn zunimmt. Die Umkehrfunktion $x = g(y)$ von $y = f(x)$ nimmt folglich für $y \geqslant f(1)$ ebenfalls monoton im strengen Sinn zu und ist stets $\geqslant 1$.

Bedeutet $q \geqslant 2$ eine feste natürliche Zahl, so gestattet jede der natürlichen Zahlen $f(k)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) eine eindeutig bestimmte Darstellung

$$f(k) = \sum_{\lambda=0}^{N_k} Z_{k\lambda}\, q^{N_k - \lambda} = Z_{k0}\, Z_{k1}\, Z_{k2} \dots Z_{k N_k}$$

im Zahlsystem zur Basis q; dabei gehören die Ziffern $Z_{k0}, Z_{k1}, \dots, Z_{k N_k}$ der endlichen Folge $0, 1, \dots, q-1$ an und es ist speziell $Z_{k0} > 0$. Indem die einzelnen Ziffern der Darstellungen aller $f(k)$ der Reihe nach hinter dem Komma niedergeschrieben werden, ergibt sich der Bruch

$$\sigma = 0, Z_{10}\, Z_{11} \dots Z_{1 N_1}\, Z_{20}\, Z_{21} \dots Z_{2 N_2}\, Z_{30}\, Z_{31} \dots Z_{3 N_3} \dots$$

zur Basis q, dessen arithmetische Eigenschaften im folgenden untersucht werden sollen. Zu diesem Zweck werden wir zunächst eine einfachere Reihenentwicklung für σ herleiten.

2. Sei n die durch die Ungleichungen

$$q^{n-1} \leqslant f(1) \leqslant q^n - 1$$

definierte natürliche Zahl, ferner

$$j_{n-1} = 0,\ j_\nu = [g(q^\nu - 1)] \text{ für } \nu = n, n+1, n+2, \dots.$$

Für jede natürliche Zahl $\nu \geqslant n$ werde unter J_ν die Menge aller natürlichen Zahlen k mit

$$q^{\nu-1} \leqslant f(k) \leqslant q^\nu - 1$$

verstanden. Man sieht leicht ein, dass k dann und nur dann zu J_ν gehört, wenn

$$j_{\nu-1} + 1 \leqslant k \leqslant j_\nu$$

ist; J_ν enthält also $j_\nu - j_{\nu-1}$ Elemente. Da $f(k)$ im System zur Basis q dann und nur dann ν-stellig wird, wenn k in J_ν liegt, so ist demnach die Gesamtanzahl der Ziffern aller ν-stelligen Zahlen $f(k)$ gleich

$$\nu\,(j_\nu - j_{\nu-1})$$

und folglich die Gesamtanzahl der Ziffern aller höchstens $(\nu-1)$-stelligen Zahlen $f(k)$ für $\nu=n$ gleich 0 und für $\nu>n$ gleich

$$\sum_{\mu=n}^{\nu-1} \mu\,(j_\mu - j_{\mu-1}).$$

Ferner entsteht für $\nu \geqq n$ die kleinste, bzw. die grösste ν-stellige Zahl $f(k)$, wenn $k=j_{\nu-1}+1$, bezw. $k=j_\nu$ ist.

Somit ist der additive Beitrag, den die Ziffern von $f(k)$ zu σ liefern, für k in J_n gleich

$$f(k)\,q^{-nk}$$

und für k in J_ν mit $\nu>n$ gleich

$$f(k)\,q^{-\sum\limits_{\mu=n}^{\nu-1}\mu(j_\mu-j_{\mu-1})-\nu(k-j_{\nu-1})},$$

denn eine etwaige λ-te Stelle Z hinter dem Komma in der Entwicklung von σ zur Basis q liefert den Beitrag $Zq^{-\lambda}$ zum Wert von σ. Indem die zu allen $k=1, 2, 3, \ldots$ gehörigen Teilbeiträge addiert werden, ergibt sich damit für σ die folgende Reihenentwicklung:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{j_n} f(k)\,q^{-nk}+\sum_{\nu=n+1}^{\infty} q^{-\sum\limits_{\mu=n}^{\nu-1}\mu(j_\mu-j_{\mu-1})+\nu j_{\nu-1}} \sum_{k=j_{\nu-1}+1}^{j_\nu} f(k)\,q^{-\nu k}.$$

3. Diese Entwicklung kann noch vereinfacht werden, da die Summen

$$S_\nu=\sum_{k=j_{\nu-1}+1}^{j_\nu} f(k)\,q^{-\nu k} \qquad (\nu=n, n+1, n+2, \ldots$$

sich bekanntlich explizit angeben lassen. Am einfachsten gelingt dies mittels der folgenden Formel aus der Differenzenrechnung [2]):

$$\sum_{z=0}^{\infty} F(z)\,x^z=\sum_{h=0}^{\infty}\frac{x^h \triangle^h F(0)}{(1-x)^{h+1}}.$$

Dabei bedeutet $F(z)$ eine für $z=0, 1, 2, \ldots$ definierte Funktion und

$$\triangle^h F(z)=\sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i}(-1)^i F(z+h-i) \qquad (\triangle^0 F(z)=F(z))$$

ihre h-te Differenz an der Stelle z $(h=0, 1, 2, \ldots)$.

Um von dieser Formel Gebrauch zu machen, werde S_ν in der Form

$$S_\nu=q^{-\nu(j_{\nu-1}+1)}\sum_{z=0}^{\infty} f(z+j_{\nu-1}+1)\,q^{-\nu z}-q^{-\nu(j_\nu+1)}\sum_{z=0}^{\infty} f(z+j_\nu+1)\,q^{-\nu z}$$

geschrieben und $x=q^{-\nu}$ gesetzt. Da die Differenzen $(m+1)$-ten und

---

[2]) Siehe z.B.: CESARO-KOWALEWSKI, Elementares Lehrbuch der algebraischen Analysis und der Infinitesimalrechnung (Leipzig 1904), § 807 c. Offenbar erübrigt sich im betrachteten Fall jeder Konvergenzbeweis.

höheren Grades der beiden Polynome $f(z+j_{\nu-1}+1)$ und $f(z+j_\nu+1)$ identisch in z verschwinden, so folgt alsdann

$$S_\nu = q^{-\nu j_{\nu-1}} A_\nu - q^{-\nu j_\nu} B_\nu$$

mit den Abkürzungen

$$A_\nu = \sum_{h=0}^{m} \frac{\triangle^h f(j_{\nu-1}+1)}{(q^\nu-1)^{h+1}}, \quad B_\nu = \sum_{h=0}^{m} \frac{\triangle^h f(j_\nu+1)}{(q^\nu-1)^{h+1}}.$$

Mittels dieser Gleichung lassen sich alle Teilsummen S_ν aus der im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichung für σ eliminieren. Das ergibt:

$$\sigma = (A_n - q^{-nj_n} B_n) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} q^{-\sum\limits_{\mu=n}^{\nu-1} \mu(j_\mu - j_{\mu-1}) + \nu j_{\nu-1}} (q^{-\nu j_{\nu-1}} A_\nu - q^{-\nu j_\nu} B_\nu),$$

und schliesslich durch Zusammenfassen aller Glieder mit gleichem Exponenten von q und Einsetzen der Werte von A_ν und B_ν:

$$(A): \ \sigma = \sum_{h=0}^{m} \frac{\triangle^h f(1)}{(q^n-1)^{h+1}} +$$

$$+ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} q^{-\sum\limits_{\mu=n}^{\nu-1} \mu(j_\mu - j_{\mu-1})} \sum_{h=0}^{m} \triangle^h f(j_{\nu-1}+1) \left\{ \frac{1}{(q^\nu-1)^{h+1}} - \frac{1}{(q^{\nu-1}+1)^{h+1}} \right\}.$$

4. Das letzte Ergebnis führt nun leicht zur Aufstellung einer Folge von Brüchen P_s/Q_s, die ausserordentlich schnell gegen σ konvergieren und damit den Transzendenzbeweis ermöglichen. Sei D_s für jeden Index $s \geqq n+1$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen

$$q^n - 1, \ q^{n+1} - 1, \ldots, q^s - 1,$$

weiter

$$Q_s = D_s^{m+1} q^{\sum\limits_{\mu=n}^{s-1} \mu(j_\mu - j_{\mu-1})}$$

und

$$P_s = Q_s \left\{ \sum_{h=0}^{m} \frac{\triangle^h f(1)}{(q^n-1)^{h+1}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=n+1}^{s} q^{-\sum\limits_{\mu=n}^{\nu-1} \mu(j_\mu - j_{\mu-1})} \sum_{h=0}^{m} \triangle^h f(j_{\nu-1}+1) \left(\frac{1}{(q^\nu-1)^{h+1}} - \frac{1}{(q^{\nu-1}-1)^{h+1}} \right) \right\},$$

ferner

$$R_s = \sum_{\nu=s+1}^{\infty} q^{-\sum\limits_{\mu=n}^{\nu-1} \mu(j_\mu - j_{\mu-1})} \sum_{h=0}^{m} \triangle^h f(j_{\nu-1}+1) \left(\frac{1}{(q^\nu-1)^{h+1}} - \frac{1}{(q^{\nu-1}-1)^{h+1}} \right).$$

Es besteht also die Gleichung

$$\sigma - \frac{P_s}{Q_s} = R_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Q_s ist definitionsgemäss eine natürliche Zahl. Aber auch P_s ist ganz rational, denn die Koeffizienten

$$\triangle^h f(1) \quad \text{und} \quad \triangle^h f(j_{\nu-1}+1)$$

sind als Differenzen ganzwertiger Polynome an natürlichen Stellen des Arguments ganze rationale Zahlen, so dass die Nenner der einzelnen Summanden von P_s durch den Faktor Q_s weggehoben werden. Wir werden für $log\ Q_s$ und $log\ R_s$ asymptotische Formeln ableiten und beginnen dazu mit einer solchen Formel für

$$i_\nu = \sum_{\mu=n}^{\nu-1} \mu\,(j_\mu - j_{\mu-1}) = (\nu-1)\,j_{\nu-1} - (j_n + j_{n+1} + \ldots + j_{\nu-2}).$$

Als Polynom m-ten Grades, das für $x \to +\infty$ gegen $+\infty$ strebt, gestattet $f(x)$ eine Darstellung

$$f(x) = \alpha^{-m} x^m \left(1 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha_m}{x^m}\right),$$

wo α eine positive Konstante und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ gewisse reelle Zahlen sind. Die Umkehrfunktion von $y = f(x)$ wird alsdann gleich

$$x = g(y) = \alpha\, y^{1/m} + O(1).$$

Wegen

$$j_\mu = [g(q^\mu - 1)]$$

ist also insbesondere

$$j_\mu = \alpha\, q^{\mu/m} + O(1)$$

und damit

$$i_\nu = \alpha\,(\nu-1)\,q^{\frac{\nu-1}{m}} + O\left(q^{\frac{\nu-1}{m}}\right).$$

Erstens ist nun die natürliche Zahl

$$D_s < q \cdot q^2 \cdot q^3 \ldots q^s = q^{\frac{s(s+1)}{2}},$$

so dass sich aus der vorigen Formel für i_ν und der Definition von Q_s die Beziehung

$$log\ Q_s \backsim \alpha\,(s-1)\,q^{\frac{s-1}{m}}\,log\ q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ergibt. Hiernach ist insbesondere

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\log Q_{s+1}}{\log Q_s} = q^{1/m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Zweitens ist für $\nu \to \infty$

$$\sum_{h=0}^{m} \triangle^h f(j_{\nu-1}+1) \left\{ \frac{1}{(q^\nu - 1)^{h+1}} - \frac{1}{(q^{\nu-1}-1)^{h+1}} \right\} \backsim$$

$$\backsim - f(j_{\nu-1}+1) \frac{q-1}{q^\nu} \backsim - \alpha^{-m} \left(\alpha q^{\frac{\nu-1}{m}} \right)^m \frac{q-1}{q^\nu} = - \left(1 - \frac{1}{q} \right),$$

da die Terme mit $h \geqq 1$ sich gegen den mit $h = 0$ vernachlässigen lassen. Der Summand von R_s mit $\nu = s+1$ hat also offenbar höhere Grössenordnung als alle folgenden, und man erhält

$$R_s \backsim - \left(1 - \frac{1}{q} \right) q^{-i_{s+1}}$$

und erst recht

$$\log |R_s| \backsim - \alpha s q^{\frac{s}{m}} \log q \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Hieraus folgt für alle genügend grossen s

$$R_s \neq 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Ferner ergibt sich wegen (2) die Limesgleichung

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\log |R_s|}{\log Q_s} = - q^{1/m} < -1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und die asymptotische Formel

$$\log |Q_s R_s| \backsim - \alpha s \left(q^{\frac{1}{m}} - 1 \right) q^{\frac{s-1}{m}} \log q, \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

so dass also von einem s ab

$$|Q_s R_s| < |Q_{s-1} R_{s-1}| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

ist.

5. Von TH. SCHNEIDER wurde vor einiger Zeit folgender Satz bewiesen: „*Zu der reellen Zahl* ϑ *gebe es eine Konstante* $\varkappa > 1$ *und eine unendliche Folge von Brüchen*

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots,$$

deren Nenner von einem s ab monoton zunehmen und Potenzen einer festen natürlichen Zahl q darstellen, derart dass

$$0 < \left| \vartheta - \frac{p_s}{q_s} \right| \leqq q_s^{-\varkappa} \quad \text{und} \quad \limsup_{s \to \infty} \frac{\log q_{s+1}}{\log q_s} < \infty$$

ist. Dann ist ϑ transzendent." Eine Durchsicht des Beweises dieses Satzes zeigt ohne Mühe, dass ϑ auch dann noch transzendent ist, wenn die Bedingung, dass die q_s Potenzen von q sind, durch folgende schwächere Forderung ersetzt wird [3]): „*Für jeden Index s kann $q_s = q_s' q_s''$ als Produkt einer natürlichen Zahl q_s' mit*

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\log q_s'}{\log q_s} = 0$$

und einer reinen Potenz q_s'' von q dargestellt werden."

Identifizieren wir ϑ mit σ und nehmen wir eine willkürliche Zahl $\varkappa$ mit

$$1 < \varkappa < q^{1/m},$$

so haben die Näherungsbrüche P_s/Q_s wegen (2) von einem s ab monoton zunehmende Nenner; nach Definition ist ferner $Q_s = D_s^{m+1} \cdot q^{i_s}$, wo der erste Faktor der Gleichung

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\log D_s^{m+1}}{\log Q_s} = 0$$

genügt und der zweite eine reine Potenz von q ist; endlich gilt wegen (1), (5) und (6) für genügend grosse s

$$0 < \left| \sigma - \frac{P_s}{Q_s} \right| < Q_s^{-\varkappa}$$

und es ist wegen (3)

$$\limsup_{s \to \infty} \frac{\log Q_{s+1}}{\log Q_s} < \infty.$$

Alle Voraussetzungen der vorigen Verallgemeinerung des SCHNEIDERschen Satzes sind demnach erfüllt, und man kommt zu folgendem Resultat:

Satz 1: *Die Zahl σ ist transzendent.*

6. Zu jedem Bruch P/Q mit schon genügend grossem Nenner Q kann wegen (8) ein Index s mit

$$|Q_s R_s| < \frac{1}{2Q} \leqq |Q_{s-1} R_{s-1}| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

[3]) Da SCHNEIDER selbst seinen Beweis nur skizziert, so werde verwiesen nach folgender Arbeit des Verfassers: „Ein Analogon zu einem SCHNEIDERschen Satz", Proc. Royal. Akad., Amsterdam, **39**, 633—640 u. 729—739 (1936). In dem dort in allen Einzelheiten bewiesenen Satz 2 ist der Satz von SCHNEIDER als Spezialfall enthalten.

gefunden werden. Wegen der Identität

$$\sigma - \frac{P}{Q} = \left(\frac{P_s}{Q_s} - \frac{P}{Q}\right) + R_s$$

ist alsdann entweder $\frac{P_s}{Q_s} = \frac{P}{Q}$ und also

$$\sigma - \frac{P}{Q} = R_s,$$

oder $\frac{P_s}{Q_s} \neq \frac{P}{Q}$, also $|P_s Q - P Q_s| \geqq 1$ und somit wegen (9):

$$\left|\sigma - \frac{P}{Q}\right| \geqq \frac{1}{Q Q_s} - |R_s| \geqq \frac{1}{2 Q Q_s} \geqq \frac{1}{2}|R_s|,$$

so dass in jedem Fall

$$\left|\sigma - \frac{P}{Q}\right| \geqq \frac{1}{2}|R_s| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

folgt.

Wenn nun aber Q und also auch s genügend gross ist, so gilt wegen (9) und (7)

$$\frac{1}{Q} \leqq q^{-\frac{2}{3}\alpha s (q^{1/m} - 1) q^{\frac{s-2}{m}}},$$

und wegen (10) und (4)

$$\left|\sigma - \frac{P}{Q}\right| \geqq q^{-\frac{4}{3}\alpha s q^{\frac{s}{m}}},$$

also erst recht

(B): $$\left|\sigma - \frac{P}{Q}\right| \geqq Q^{-\frac{2 q^{2/m}}{q^{1/m} - 1}}.$$

Damit ist bewiesen:

Satz 2: *Alle Näherungsbrüche von σ mit genügend grossem Nenner genügen der Ungleichung (B). Die Zahl σ ist also Nicht-Liouvillesch.*

Herrn Dr. med. A. HEILBRONN gewidmet.

Krefeld, März 1937.