EINE BEMERKUNG ZUM BEWEIS DER EULERSCHEN SUMMENFORMEL

VON

KURT MAHLER, in Manchester.

Die Eulersche Summenformel gestattet bekanntlich, Summen von Funktionswerten durch die Summe endlichvieler Integrale über die betreffende Funktion zu ersetzen. Der Beweis verläuft gewöhnlich so, dass zunächst die Bernoullischen Zahlen und Funktionen durch ihre Rekursionsformeln definiert und Identitäten zwischen ihnen abgeleitet werden; aus letzteren ergibt sich die Eulersche Formel durch wiederholte partielle Integration.

In dieser Note wird der Ansatz umgekehrt. Es wird angenommen, dass für beliebige im Intervall $a \leq x \leq b$ k-mal differenzierbare Funktionen $f(x)$ die Eulersche Formel in der Gestalt

$$\int_a^b f(x)\,dq(x) = \sum_{h=0}^{k-1} \mathrm{H}_h \int_a^b f^{(h)}(x)p(x)\,dx + \int_a^b \mathrm{H}_k(x)\, f^{(k)}(x)p(x)\,dx$$

besteht, wobei $dq(x)$ ein festes Stieltjes-Differential, $p(x)$ eine feste positive Funktion, $\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \ldots \mathrm{H}_{k-1}$ unbekannte Konstante und $\mathrm{H}_k(x)$ eine unbekannte Funktion ist. Indem man für $f(x)$ geeignete Sprungfunktionen einsetzt, lassen sich $\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \ldots \mathrm{H}_{k-1}$ und $\mathrm{H}_k(x)$ bestimmen. Aus diesen expliziten Formeln folgt umgekehrt die Eulersche Formel für alle k-mal differenzierbaren Funktionen als triviale Folge davon, dass jede abteilungsweise stetige Funktion sich beliebig genau durch Treppenfunktionen annähern lässt.

Das Beweisverfahren kann auf Bereiche in beliebig vielen Dimensionen übertragen werden.

1. Die Funktion $p(x)$ sei im abgeschlossenen Intervall J:

$$a \leq x \leq b$$

positiv und beliebig oft differenzierbar; $q(x)$ bedeute eine Funktion von beschränkter Schwankung in J und $dq(x)$ das zugehörige Stieltjes-Differential. Zu jeder natürlichen Zahl k sollen im Intervall J im folgenden $k+1$ Funktionen

$$\mathrm{H}_h^{(k)}(x) \qquad (h = 0, 1, \ldots k)$$

mit folgenden Eigenschaften bestimmt werden:

A. *Die k Funktionen*

$$\mathrm{H}_h^{(k)}(x) \qquad (h = 0, 1, \ldots . k-1)$$

sind von x nicht abhängig.

B. *Die Funktion*

$$\mathrm{H}_k^{(k)}(x)$$

ist für $k \geq 2$ im ganzen Intervall J stetig, für $k = 1$ in allen Punkten von J, die keine Sprungstellen von $q(x)$ sind.

C. *Wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall J Ableitungen*

$$f^{(h)}(x) = \frac{d^h f(x)}{dx^h} \qquad (h = 0, 1, \ldots . k)$$

bis zur k-ten Ordnung besitzt und $f^{(k)}(x)$ noch stückweise stetig ist, so soll die „Eulersche Formel"

$$\int_a^b f(x) dq(x) = \sum_{h=0}^{k} \int_a^b \mathrm{H}_h^{(k)}(x) f^{(h)}(x) p(x) dx$$

bestehen.

Es wird sich zeigen, dass durch diese Forderungen die Funktionen

$$\mathrm{H}_h^{(k)}(x) \qquad (h = 0, 1, \ldots . k)$$

eindeutig bestimmt sind; man erhält sie, indem man in der Eulerschen Formel für $f(x)$ spezielle Funktionen einsetzt.

2. Nimmt man in der Eulerschen Formel

$$f(x) = \frac{x^l}{l!} \qquad (l = 0, 1, \ldots . k-1),$$

so gelangt man zu den Gleichungen:

$$\int_a^b \frac{x^l}{l!} dq(x) = \sum_{h=0}^{l} \mathrm{H}_h^{(k)}(x) \int_a^b \frac{x^{l-h}}{(l-h)!} p(x) dx.$$

Man entnimmt ihnen, dass die Konstanten

$$\mathrm{H}_h = \mathrm{H}_h^{(k)}(x)$$

auch von k nicht abhängen; wegen

$$\int_a^b p(x) dx > 0$$

sind sie eindeutig bestimmt. Setzt man in den Rekursionsformeln

$$\int_a^b \frac{x^l}{l!} dq(x) = \sum_{h=0}^{l} \mathrm{H}_h \int_a^b \frac{x^{l-h}}{(l-h)!} p(x) dx$$

für l der Reihe nach die Werte $0, 1, 2, \ldots.$ ein, so gelangt man zu einer unendlichen Folge von Zahlen

$$\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \ldots.,$$

deren k erste Glieder für jedes k mit den Funktionen

$$\mathrm{H}_h^{(k)}(x) \qquad (h = 0, 1, \ldots. k-1)$$

zusammenfallen.

Sei z eine komplexe Veränderliche und

$$\mathrm{P}(z) = \int_a^b e^{xz} p(x) dx,$$

$$\mathrm{Q}(z) = \int_a^b e^{xz} dq(x),$$

$$\mathrm{H}(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \mathrm{H}_h z^h$$

gesetzt. Die beiden Integrale $\mathrm{P}(z)$ und $\mathrm{Q}(z)$ stellen ganze transzendente Funktionen dar, von denen die erste im Nullpunkt nicht verschwindet. Auf Grund der Rekursionsformeln ist $\mathrm{H}(z)$ mit ihnen durch die Identität

$$\mathrm{H}(z) = \frac{\mathrm{Q}(z)}{\mathrm{P}(z)}$$

verbunden, also eine meromorphe Funktion, die im Nullpunkt regulär ist; somit existiert eine endliche positive Konstante c_0, mit der für alle grossen Indizes h die Ungleichung

$$\mathrm{H}_h = \mathrm{O}(c_0^h)$$

besteht. Statt dieser Ungleichung kann eine konvergente Reihenentwicklung für die Zahlen H_h aufgestellt werden. Es ist nach dem Cauchyschen Integral-Satz:

$$\mathrm{H}_h = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{Q}(z) dz}{\mathrm{P}(z) z^{h+1}},$$

wenn über einen genügend kleinen Kreis K um den Nullpunkt in positiver Richtung integriert wird. Für den Integranden lassen sich Abschätzungen in der Umgebung von $z = \infty$ erhalten.

Dem Integral für $\mathrm{Q}(z)$ entnimmt man nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung die Ungleichungen

$$\mathrm{Q}(z) = \begin{cases} \mathrm{O}(e^{b\mathrm{R}(z)}) & \text{für } \mathrm{R}(z) \geq 0, \\ \mathrm{O}(e^{a\mathrm{R}(z)}) & \text{für } \mathrm{R}(z) \leq 0. \end{cases}$$

Wendet man ferner auf $P(z)$ und die Ableitung hiervon nach z zweimal partielle Integration an, so kommt man zu den Formeln

$$P(z) = \frac{e^{bz}p(b) - e^{az}p(a)}{z} - \frac{e^{bz}p'(b) - e^{az}p'(a)}{z^2} + \int_a^b \frac{e^{xz}p''(x)dx}{z^2},$$

$$P'(z) = \frac{e^{bz}\,bp(b) - e^{az}\,ap(a)}{z} -$$

$$- \frac{e^{bz}(bp'(b) + p(b)) - e^{az}(ap'(a) + p(a))}{z^2} + \int_a^b \frac{e^{xz}(xp(x))''dx}{z^2}$$

und mit ihrer Hilfe zu den Ungleichungen

$$P(z) = \frac{e^{bz}p(b) - e^{az}p(a)}{z} + \begin{cases} O\left(\dfrac{e^{bR(z)}}{z^2}\right) & \text{für } R(z) \geq 0, \\ O\left(\dfrac{e^{aR(z)}}{z^2}\right) & \text{für } R(z) \leq 0, \end{cases}$$

$$P'(z) = \frac{e^{bz}bp(b) - e^{az}ap(a)}{z} + \begin{cases} O\left(\dfrac{e^{bR(z)}}{z^2}\right) & \text{für } R(z) \geq 0, \\ O\left(\dfrac{e^{aR(z)}}{z^2}\right) & \text{für } R(z) \leq 0. \end{cases}$$

Seien jetzt $-A$ und B zwei genügend grosse positive Konstante. Ausserhalb des Parallelstreifens

$$A \leq R(z) \leq B$$

gehen die vorigen Ungleichungen über in

$$P(z) = \frac{e^{bz}p(b) - e^{az}p(a)}{z}\left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right),$$

so dass hier $P(z)$ keine Nullstellen haben kann. Im Innern des Parallelstreifens hat man dagegen

$$zP(z) = e^{bz}p(b) - e^{az}p(a) + O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

$$zP'(z) = e^{bz}bp(b) - e^{az}ap(z) + O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Also liegen hier unendlichviele Nullstellen von $P(z)$; diejenigen von ihnen mit sehr grossem Imaginärteil haben die Form

$$\zeta_n = \frac{1}{b-a}\log\frac{p(a)}{p(b)} + \frac{2n\pi i}{b-a} + O\left(\frac{1}{|n|}\right),$$

wobei n alle grossen positiven und negativen ganzen rationalen Zahlen durchläuft. Da

$$\zeta_n \mathrm{P}'(\zeta_n) = (b-a)p(a)^{\frac{b}{b-a}} p(b)^{\frac{a}{b-a}} e^{\frac{2na\pi i}{b-a}}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{|n|}\right)\right)$$

von einem n ab nicht verschwindet, so besitzt $\mathrm{P}(z)$ nur endlichviele mehrfache Nullstellen. Ausserhalb eines gewissen Kreises um den Nullpunkt sind alle Nullstellen einfach und von der vorigen Gestalt.

Um den Nullpunkt der z-Ebene werde ein Quadrat Q_n

$$-\frac{(2n+1)\pi i}{b-a} \leq \mathrm{R}(z) \leq \frac{(2n+1)\pi i}{b-a};$$

$$-\frac{(2n+1)\pi i}{b-a} \leq \mathrm{I}(z) \leq \frac{(2n+1)\pi i}{b-a}$$

mit dem Rand C_n gezogen; von einem natürlichen n ab haben dann die Nullstellen von $\mathrm{P}(z)$ von C_n einen Mindestabstand $\frac{\pi i}{2(b-a)}$. Hieraus und aus den früheren Abschätzungen für $\mathrm{P}(z)$ und $\mathrm{Q}(z)$ folgt, dass gleichmässig

$$\frac{\mathrm{Q}(z)}{\mathrm{P}(z)} = \mathrm{O}(n)$$

auf C_n ist. Das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{C}_n} \frac{\mathrm{Q}(z)dz}{\mathrm{P}(z)z^{h+1}} = \mathrm{O}\left(\frac{n\,n}{n^{h+1}}\right) = \mathrm{O}(n^{1-h})$$

strebt also für $n \to \infty$ gegen Null, wenn $h \geq 2$ ist. Mittels des Residuensatzes ergibt sich aus der Integraldarstellung

$$\mathrm{H}_h = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{Q}(z)dz}{\mathrm{P}(z)z^{h+1}}$$

somit die Reihenentwicklung

$$\mathrm{H}_h = -\sum_{\zeta}{}' \frac{\mathrm{Q}(\zeta)}{\mathrm{P}'(\zeta)\zeta^{h+1}} \qquad (h = 2, 3, \ldots\ldots).$$

Der Strich bedeutet dabei, dass über alle Nullstellen von $\mathrm{P}(z)$ zu summieren ist; für die endlichvielen mehrfachen Nullstellen ζ ist der Summand

$$\frac{\mathrm{Q}(\zeta)}{\mathrm{P}'(\zeta)\zeta^{h+1}}$$

zu ersetzen durch das Residuum von

$$\frac{Q(z)}{P(z)z^{h+1}}$$

an der Stelle $z = \zeta$. Für $h = 1$ lässt sich zeigen, dass die vorige Formel bestehen bleibt, wenn die Summe über alle Nullstellen ζ in einer unendlichen Folge von Quadraten

$$Q_{n_1},\ Q_{n_2},\ Q_{n_3},\ \ldots$$

genommen wird; natürlich ist die Konvergenz im allgemeinen nicht absolut. Schliesslich ist

$$H_0 = \frac{q(b) - q(a)}{\int\limits_a^b p(x)dx}.$$

3. Sei ξ eine beliebige Zahl im Innern des Intervalls J, ϵ eine positive und sehr kleine Zahl, so dass auch noch $\xi - \frac{\epsilon}{2}$ und $\xi + \frac{\epsilon}{2}$ in J liegen.

Wird die unstetige Funktion

$$(x, \xi \mid \epsilon)_0 = \begin{cases} 0 \text{ für } x \leq \xi - \frac{\epsilon}{2}, \\ \frac{1}{\epsilon} \text{ für } \xi - \frac{\epsilon}{2} < x \leq \xi + \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 \text{ für } \xi + \frac{\epsilon}{2} < x \end{cases}$$

k-mal nacheinander über x von a bis x integriert, so erhält man die neuen Funktionen

$$(x, \xi \mid \epsilon)_k = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \xi - \frac{\epsilon}{2}, \\ \dfrac{\left(x - \xi + \frac{\epsilon}{2}\right)^k}{k!\,\epsilon} & \text{für } \xi - \frac{\epsilon}{2} < x \leq \xi + \frac{\epsilon}{2}, \\ \dfrac{\left(x - \xi + \frac{\epsilon}{2}\right)^k - \left(x - \xi - \frac{\epsilon}{2}\right)^k}{k!\,\epsilon} & \text{für } \xi + \frac{\epsilon}{2} < x. \end{cases}$$

Wenn die Funktion

$$(x, \xi) = \begin{cases} 0 \text{ für } x < \xi, \\ \frac{1}{2} \text{ für } x = \xi, \\ 1 \text{ für } x > \xi \end{cases}$$

eingeführt wird, so besteht dann in J die Beziehung

$$\lim_{\epsilon \to 0} (x, \xi \mid \epsilon)_k = (x, \xi) \frac{(x - \xi)^{k-1}}{(k-1)!} \quad (k = 1, 2, 3, ..)$$

und zwar für $k > 1$ in ganz J gleichmässig, für $k = 1$ aber in ganz J weniger einer Umgebung von ξ gleichmässig.

Die Eulersche Formel geht durch die Wahl

$$f(x) = (x, \xi \mid \epsilon)_k$$

über in

$$\int_a^b (x, \xi \mid \epsilon)_k \, dq(x) = \sum_{h=0}^{k-1} \mathrm{H}_h \int_a^b (x, \xi \mid \epsilon)_{k-h} \, p(x) dx + \\ + \int_a^b (x, \xi \mid \epsilon)_0 \, \mathrm{H}_k^{(k)}(x) p(x) dx.$$

Sei ξ im Falle $k = 1$ verschieden von den abzählbar vielen Sprungstellen von $q(x)$. Dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^b (x, \xi \mid \epsilon)_k \, dq(x) = \int_\xi^b \frac{(x - \xi)^{k-1}}{(k-1)!} \, dq(x),$$

ebenso die Grenzwerte

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^b (x, \xi \mid \epsilon)_{k-h} \, p(x) dx = \int_\xi^b \frac{(x - \xi)^{k-h-1}}{(k-h-1)!} p(x) dx.$$

In der Identität

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left\{ \int_a^b (x, \xi \mid \epsilon)_k \, dq(x) - \sum_{h=0}^{k-1} \mathrm{H}_h \int_a^b (x, \xi \mid \epsilon)_{k-h} \, p(x) dx \right\} = \\ = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^b (x, \xi \mid \epsilon)_0 \, \mathrm{H}_k^{(k)} (x) p(x) dx$$

hat also die linke Seite einen Sinn, somit auch die rechte. Es ist aber

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_a^b (x, \xi \mid \epsilon)_0 \, \mathrm{H}_k^{(k)} (x) p(x) dx = \\ = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\xi - \frac{\epsilon}{2}}^{\xi + \frac{\epsilon}{2}} \mathrm{H}_k^{(k)} (x) p(x) dx = \mathrm{H}_k^{(k)} (\xi) p(\xi).$$

vorhanden; somit besteht folgende Gleichung:

$$\mathrm{H}_k^{(k)}(\xi) p(\xi) = \\ = \int_\xi^b \frac{(x - \xi)^{k-1}}{(k-1)!} \, dq(x) - \sum_{h=0}^{k-1} \mathrm{H}_h \int_\xi^b \frac{(x - \xi)^{k-h-1}}{(k-h-1)!} p(x) dx.$$

Diese Formel diene auch noch in den beiden Randpunkten von J als Definition von $H_k^{(k)}(\xi)$; ferner möge in den Sprungstellen von $q(x)$ für $k=1$ die Funktion $H_k^{(k)}(\xi)$ als Mittelwert zwischen den beiden Zahlen

$$\lim_{\epsilon\to 0} H_k^{(k)}(\xi-\epsilon) \quad \text{und} \quad \lim_{\epsilon\to 0} H_k^{(k)}(\xi+\epsilon)$$

genommen werden.

Der Darstellung von $H_k^{(k)}(\xi)$ entnimmt man, dass diese Funktion Ableitungen bis zur $(k-1)$-ten Ordnung hat, und dass ihre $(k-1)$-te Ableitung in den Stetigkeitsstellen von $q(x)$ stetig ist, in den Sprungstellen dieser Funktion aber der Beziehung

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(H_k^{(k)}(x)p(x)\right)\Big|_{x=\xi+\epsilon}-\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(H_k^{(k)}(x)p(x)\right)\Big|_{x=\xi-\epsilon}\right\}=$$
$$=\lim_{\epsilon\to 0}\left(q(\xi+\epsilon)-q(\xi-\epsilon)\right)$$

genügt. Weiter ist offenbar

$$\frac{d}{d\xi}\left(H_k^{(k)}(\xi)p(\xi)\right)=-\left(H_{k-1}^{(k-1)}(\xi)-H_{k-1}\right)p(\xi),$$

wobei für $k=2$ die Stelle ξ keine Sprungstelle von $q(x)$ sein darf, ferner

$$H_k^{(k)}(a)=H_k^{(k)}(b)=0,$$

wenn noch für $k=1$ diese Endpunkte Stetigkeitsstellen von $q(x)$ sind.

Auch $H_k^{(k)}(\xi)$ lässt sich als Cauchysches Integral darstellen. Setzt man

$$Q(z\,|\,\xi)=\int_\xi^b e^{(x-\xi)z}\,dq(x),$$

$$P(z\,|\,\xi)=\int_\xi^b e^{(x-\xi)z}\,p(x)dx,$$

$$H(z\,|\,\xi)=\sum_{k=1}^{\infty} H_k^{(k)}(\xi)z^{k-1},$$

so ist

$$H(z\,|\,\xi)p(\xi)=Q(z\,|\,\xi)-P(z\,|\,\xi)H(z)$$

oder

$$H(z\,|\,\xi)p(\xi)=\frac{P(z)Q(z\,|\,\xi)-P(z\,|\,\xi)Q(z)}{P(z)},$$

und folglich

$$\mathrm{H}_k(\xi)p(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{K}} \frac{\mathrm{P}(z)\mathrm{Q}(z \mid \xi) - \mathrm{P}(z \mid \xi)\mathrm{Q}(z)}{z^k \mathrm{P}(z)}\, dz.$$

Man sieht leicht, dass

$$\mathrm{Q}(z \mid \xi) = \mathrm{O}(1), \quad \mathrm{P}(z \mid \xi) = \mathrm{O}(1)$$

ist, wenn der Realteil von z kleiner als irgend eine feste positive Zahl bleibt. Daraus lässt sich ähnlich wie früher ableiten, dass für $k \geq 3$

$$\mathrm{H}_k(\xi)p(\xi) = \sum_{\zeta}{}' \frac{\mathrm{P}(\zeta \mid \xi)\mathrm{Q}(\zeta)}{\mathrm{P}(\zeta)\,\zeta^k} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{G}} \frac{\mathrm{P}(z)\mathrm{Q}(z \mid \xi) - \mathrm{P}(z \mid \xi)\mathrm{Q}(z)}{\mathrm{P}(z) z^k}\, dz$$

ist; das Restintegral wird dabei über irgend eine Gerade senkrecht zur reellen Achse erstreckt, auf deren linker Seite alle Nullstellen von $\mathrm{P}(z)$ liegen. In vielen Fällen kann gezeigt werden, dass es den Wert Null hat.

4. Es bleibt zu beweisen, dass die Funktionen

$$\mathrm{H}_h^{(k)}(x) \qquad\qquad (h = 0, 1, \ldots . k)$$

die in 2. und 3. abgeleitet wurden, auch tatsächlich die Eulersche Formel befriedigen, wenn $\mathrm{f}(x)$ gemäss den Bedingungen 1. C) gewählt wird.

Jede solche Funktion lässt sich nach der Taylorschen Formel in der Gestalt

$$f(x) = \sum_{h=0}^{k-1} \frac{f^{(h)}(a)}{h!}(x-a)^h + \mathrm{I}^k f^{(k)}(x); \qquad \mathrm{I}^k = \left(\int\limits_a^x dx\right)^k \ldots .$$

darstellen. Die Summe

$$\sum_{h=0}^{k-1} \frac{f^{(h)}(a)}{h!}(x-a)^h$$

ist ein Polynom $(k-1)$-ten Grades, die Eulersche Formel also gewiss für sie erfüllt. Es bleibt der Beweis für Funktionen

$$f(x) = \mathrm{I}^k g(x),$$

wo $g(x)$ in J bis auf endlichviele Sprünge stetig ist, zu führen. Jede solche Funktionen lässt sich aber gleichmässig in J bis auf die Umgebungen der Sprungstellen samt ihren Ableitungen durch Funktionen

$$r(x) = \mathrm{I}^k s(x)$$

beliebig genau annähern, wenn $s(x)$ in J überall bis auf endlichviele Sprünge konstant ist; wenn für letztere die Eulersche

Formel gilt, so besteht sie allgemein. Die Funktionen $r(x)$ wiederum können additiv aus endlichvielen Funktionen der speziellen Form:

$$r(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \xi, \\ \dfrac{(x-\xi)^k}{k!} & \text{für } x \geq \xi, \end{cases} \qquad s(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \xi \\ 1 & \text{für } x \geq \xi \end{cases}$$

zusammengesetzt werden, so dass nur für diese Funktionen noch die Eulersche Formel zu beweisen ist. Sie lautet ausgeschrieben:

$$\int_\xi^b \frac{(x-\xi)^k}{k!} dq(x) = \sum_{h=0}^{k-1} \mathrm{H}_h \int_\xi^b \frac{(x-\xi)^{k-h}}{(k-h)!} p(x)dx + \int_\xi^b \mathrm{H}_k^{(k)}(x) p(x)\, dx.$$

Es ist aber anderseits

$$\int_\xi^b \frac{(x-\xi)^k}{k!} dq(x) = \sum_{h=0}^{k} \mathrm{H}_h \int_\xi^b \frac{(x-\xi)^{k-h}}{(k-h)!} p(x)dx + \mathrm{H}_{k+1}^{(k+1)}(\xi)\, p(\xi),$$

so dass nur die Gleichung

$$\mathrm{H}_{k+1}^{(k+1)}(\xi)\, p(\xi) + \mathrm{H}_k \int_\xi^b p(x)dx = \int_\xi^b \mathrm{H}_k^{(k)}(x) p(x) dx$$

zu beweisen ist. Sie folgt aber sofort aus den Gleichungen

$$\frac{d}{d\xi}\left(\mathrm{H}_{k+1}^{(k+1)}(\xi) p(\xi)\right) = \left(\mathrm{H}_k^{(k)}(\xi) - \mathrm{H}_k\right) p(\xi)\,; \qquad \mathrm{H}_{k+1}^{(k+1)}(b) = 0\,;$$

also ist damit die Eulersche Formel allgemein bewiesen.

Krefeld, Ostern 1931.