EIN MINIMALPROBLEM FÜR KONVEXE POLYGONE.

Von KURT MAHLER in Manchester.

§ 1. Polare konvexe Polygone.

Durch die Polarität in bezug auf einen Kegelschnitt wird bekanntlich jedem Punkt der Ebene eine Gerade derselben zugeordnet, und umgekehrt. Dabei gehen Punkt und Gerade in vereinter Lage wieder in solche über, so dass Punkten auf derselben Geraden Geraden durch denselben Punkt entsprechen.

Um die Polaritätstransformation besonders einfach zu gestalten, bedienen wir uns rechtwinkliger Koordinaten (x, y) und legen als Kegelschnitt den Einheitskreis

$$x^2 + y^2 = 1$$

zugrunde. Dem Pol P : (ξ, η) entspricht alsdann die Polare G: $\xi x + \eta y = 1$; diese steht senkrecht auf der Verbindungslinie von P mit dem Ursprung O: (0, 0) und schneidet sie im Abstand $1/\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ von O.

Möge speziell einem Polygon Π mit den $n \geqq 3$ Ecken P_h: (X_h, Y_h) und den n-Seiten G_h: $X'_h x + Y'_h y = 1$, wo $h = 1, 2, \ldots, n$, durch die Polartransformation das Polygon Π' mit den n Ecken P'_h: (X'_h, Y'_h) und den n Seiten G'_h: $X_h x + Y_h y = 1$ entsprechen; dabei werde die Numerierung so getroffen, dass bei Π die Ecken P_h und P_{h+1} (bzw. P_n und P_1) durch die Seite G_h (bzw. G_n) verbunden sind, und analog bei Π'. Wir wollen ferner annehmen, dass Π ein konvexes Polygon ist (d.h. mit irgend zwei Punkten deren Verbindungsstrecke enthält) und den Koordinatenursprung O im Innern enthält; die sämtlichen Eckwinkel von Π sind also kleiner als $\pi = 2R = 180°$, und sein Rand hat keinen Doppelpunkt und läuft genau einmal um den Ursprung. Dann ist auch das polare Polygon Π' konvex und enthält O im Innern; dies zeigt man leicht durch Induktion nach n, indem man vom Dreieck ausgeht.

Das Polygon Π habe etwa den Inhalt J, das polare Polygon Π' den Inhalt J'. *Wir werden beweisen, dass allgemein*

$$JJ' \geqq 27/4 \tag{1}$$

ist. Dies ist auch die einzige zwischen J und J' bestehende Beziehung, wie das folgende Beispiel zeigt: Man nehme für Π das Dreieck mit den Ecken

$$(t, 0), \left(-1, \frac{J}{1+t}\right), \left(-1, -\frac{J}{1+t}\right),$$

wo $J > 0$ und $t > 0$ beliebig sind. Eine einfache Rechnung zeigt, dass sein Polardreieck Π' die Ecken

$$(-1, 0), \left(\frac{1}{t}, -\frac{(1+t)^2}{Jt}\right), \left(\frac{1}{t}, \frac{(1+t)^2}{Jt}\right)$$

besitzt und dass Π den Inhalt J und Π' den Inhalt

$$J' = \frac{(1+t)^3}{Jt^2}$$

hat; für $t = 2$ wird also $J' = 27/4J$, und durch geeignete Wahl von t lässt sich J' jeder grössere Wert erteilen.

In einem für zahlentheoretische Anwendungen wichtigen Spezialfall lässt sich die Ungleichung (1) verschärfen. Das Polygon Π und also auch das Polarpolygon Π' habe den Ursprung als Mittelpunkt, enthalte also mit (x, y) stets auch den diametralen Punkt $(-x, -y)$; dazu muss $n = 2m$ $(m \geqq 2)$ eine gerade Zahl und

$$X_{m+h} = -X_h, \; Y_{m+h} = -Y_h, \; X'_{m+h} = -X'_h, \; Y'_{m+h} = -Y'_h$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m)$$

sein. *Wie wir zeigen werden, ist in diesem Fall*

$$JJ' \geqq 8; \tag{2}$$

dabei gilt hier das Gleichheitszeichen für jedes Parallelogramm Π. Jetzt ist aber das Produkt JJ' auch nach der anderen Richtung beschränkt; in der Tat zeigt man leicht die Ungleichung [1])

$$JJ' < 16.$$

§ 2. Polare Dreiecke und Parallelogramme.

Sei Δ ein willkürliches Dreieck mit den Ecken

$$Q_1: (x_1, y_1), \; Q_2: (x_2, y_2), \; Q_3: (x_3, y_3),$$

dessen Berandung nicht durch O geht, und das nicht in ein Intervall ausartet. Dann führen wir zwei Vorzeichen

$$\delta_\Delta = \delta(Q_1, Q_2, Q_3) \text{ und } \epsilon_\Delta = \epsilon(Q_1, Q_2, Q_3)$$

ein durch die Festsetzungen:

$$\delta_\Delta = \begin{cases} +1, & \text{wenn O innerhalb von } \Delta \text{ liegt}, \\ -1, & \text{wenn O ausserhalb von } \Delta \text{ liegt}; \end{cases}$$

und

$$\epsilon_\Delta = \begin{cases} +1, \\ -1, \end{cases} \text{ wenn } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{positiv ist}, \\ \\ \text{negativ ist}. \end{matrix}$$

Alsdann hat Δ den Inhalt

$$J_\Delta = J(Q_1, Q_2, Q_3) = \frac{\epsilon_\Delta}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\epsilon_\Delta}{2}(A_1 + A_2 + A_3), \tag{3}$$

wo

$$A_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

gesetzt wird; diese Zahlen lassen sich ebenfalls als Dreiecksinhalte deuten:

---

1) Man zeigt dies, indem man zu Π ein Um-und ein Inparallelogramm konstruiert, deren Inhalte im Verhältnis 2 : 1 stehen. Die genaue Ungleichung lautet wahrscheinlich

$$JJ' < \pi^2.$$

$$A_1 = 2\epsilon(O, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) J(O, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2); \quad A_2 = 2\epsilon(O, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3) J(O, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3);$$
$$A_3 = 2\epsilon(O, \mathfrak{Q}_3, \mathfrak{Q}_1) \; J(O, \mathfrak{Q}_3, \mathfrak{Q}_1).$$

Das Polardreieck Δ' hat offenbar die Ecken

$$\mathfrak{Q}_1' : \left(\frac{y_1 - y_2}{A_1}, \frac{x_2 - x_1}{A_1}\right), \qquad \mathfrak{Q}_2' : \left(\frac{y_2 - y_3}{A_2}, \frac{x_3 - x_2}{A_2}\right),$$
$$\mathfrak{Q}_3' : \left(\frac{y_3 - y_1}{A_3}, \frac{x_1 - x_3}{A_3}\right);$$

man hat

$$\epsilon_{\Delta'} = \delta_\Delta \epsilon_\Delta,$$

und der Inhalt von Δ' ist gleich

(5) $$J_{\Delta'} = 2\delta_\Delta \frac{J_\Delta^2}{A_1 A_2 A_3}.$$

Um diese Formeln anzuwenden, wollen wir erstens annehmen, dass O im Innern von Δ liegt, dieses Dreieck also den Bedingungen für Π mit $n = 3$ genügt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man dann

$\epsilon_\Delta = +1$, also $\epsilon(O, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2) = \epsilon(O, \mathfrak{Q}_2, \mathfrak{Q}_3) = \epsilon(O, \mathfrak{Q}_3, \mathfrak{Q}_1) = +1$

annehmen, so dass

$$A_1 > 0, \quad A_2 > 0, \quad A_3 > 0$$

ist. Aus (4) und (5) folgt aber wegen $\delta_\Delta = +1$:

$$J_\Delta J_{\Delta'} = \frac{27}{4} \cdot \frac{\left(\frac{A_1 + A_2 + A_3}{3}\right)^3}{A_1 A_2 A_3},$$

und also erst recht

(6) $$J_\Delta J_{\Delta'} \geqq \frac{27}{4},$$

denn für irgend drei positive Zahlen A_1, A_2, A_3 ist bekanntlich

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3}{3} \geqq \sqrt[3]{A_1 A_2 A_3}.$$

Damit ist also die Ungleichung (1) für alle Dreiecke bewiesen. Wir können auch in diesem Spezialfall leicht feststellen, wann das Gleichheitszeichen in (6) gilt. Dazu muss offenbar $A_1 = A_2 = A_3$ sein; *notwendig und hinreichend hierfür ist also*, dass Δ durch den Ursprung O in drei inhaltsgleiche Teildreiecke $O\mathfrak{Q}_1\mathfrak{Q}_2$, $O\mathfrak{Q}_2\mathfrak{Q}_3$ und $O\mathfrak{Q}_3\mathfrak{Q}_1$ zerlegt wird, d.h. *dass O der Schwerpunkt von Δ und natürlich auch von Δ' ist.*

Als zweite Anwendung wollen wir annehmen, dass O ausserhalb von liegt, also $\delta_\Delta = -1$ ist, und dass ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\epsilon_\Delta = +1, \quad \epsilon(O, Q_1, Q_2) = \epsilon(O, Q_2, Q_3) = +1,$$
$$\epsilon(O, Q_3, Q_1) = -1,$$

also

$$\varDelta_1 > 0, \quad \varDelta_2 > 0, \quad \varDelta_3 < 0$$

sei; es ist demnach

$$J_\Delta = \tfrac{1}{2}(\varDelta_1 + \varDelta_2 - |\varDelta_3|), \quad J_\Delta{}' = \frac{2J_\Delta^2}{\varDelta_1\varDelta_2\,|\varDelta_3|}.$$

Weiter wollen wir J_Δ als konstant und gegeben voraussetzen, und auch die beiden Eckpunkte Q_1 und Q_3 festhalten, dagegen Q_2 so variieren lassen, dass der Bedingung der Konstanz von J_Δ und den Vorzeichenforderungen für die $\varDelta$ genügt wird. Das besagt, dass Q_2 auf der offenen Strecke S:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \varDelta_1 + \varDelta_2 - |\varDelta_3| = 2J_\Delta,$$

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} > 0$$

liegen muss; wir erhalten alle Punkte derselben genau einmal, wenn $\varDelta_1$ die sämtlichen Zahlen des Intervalls

$$0 < \varDelta_1 < 2J_\Delta + |\varDelta_3| \tag{7}$$

durchläuft und dazu $\varDelta_2$ durch

$$\varDelta_2 = 2J_\Delta + |\varDelta_3| - \varDelta_1,$$

folglich $J_\Delta{}'$ durch

$$J_\Delta{}' = \frac{2J_\Delta^2}{\varDelta_1(2J_\Delta + |\varDelta_3| - \varDelta_1)\,|\varDelta_3|}$$

bestimmt wird.

Wir wollen die Forderung (7) durch eine schärfere Ungleichung

$$\alpha \leqq \varDelta_1 \leqq \beta \tag{8}$$

ersetzen, wo α und β zwei beliebige Zahlen mit

$$0 < \alpha < \beta < 2J_\Delta + |\varDelta_3|$$

sind; dies ist damit gleichwertig, dass Q_2 auf einer abgeschlossenen Teilstrecke S* von S liegen soll. Während J_Δ konstant ist, hängt $J_\Delta{}'$ stetig von Q_2 in S* ab; es muss also ein absolutes Maximum von $J_\Delta{}'$ auf dieser Strecke geben. Wir behaupten:

Lemma: Unter den gemachten Voraussetzungen wird das absolute Maximum von J_Δ' *entweder in einem Randpunkt oder in beiden Randpunkten von* S^* *erreicht, keineswegs aber im Innern dieser Strecke.*

In der Tat ist

$$\frac{2J_\Delta^2}{|A_3|\,J_\Delta'} = \left(J_\Delta + \frac{|A_3|}{2}\right)^2 - \left(J_\Delta + \frac{|A_3|}{2} - A_1\right)^2$$

und die Behauptung daher evident; denn die rechte Seite hat ein Maximum im Punkt $A_1 = J_\Delta + \frac{|A_3|}{2}$ und nimmt von hier aus monoton nach beiden Seiten ab.

Entweder aus den letzten Formeln oder einfacher direkt kann man unschwer eine Inhaltsformel für ein willkürliches Parallelogramm P und sein Polarparallelogramm P', deren Mittelpunkte im Ursprung liegen, gewinnen. Habe P die vier Ecken

$$P_1 : (X_1, Y_1), \quad P_2 : (X_2, Y_2), \quad P_3 : (-X_1, -Y_1), \quad P_4 : (-X_2, -Y_2);$$

damit aus diesen in der genannten Reihenfolge ein eigentliches Parallelogramm entsteht, muss offenbar

$$\lambda = \begin{vmatrix} X_1, & Y_1 \\ X_2, & Y_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

sein, und dann hat P den Inhalt

$$J_P = 2\,|\lambda|.$$

Das Polarparallelogramm P' hat die Ecken

$$P_1' : \left(\frac{Y_1 - Y_2}{\lambda}, \frac{-X_1 + X_2}{\lambda}\right), \; P_2' : \left(\frac{Y_1 + Y_2}{\lambda}, \frac{-X_1 - X_2}{\lambda}\right),$$

$$P_3' : \left(\frac{-Y_1 + Y_2}{\lambda}, \frac{X_1 - X_2}{\lambda}\right), \; P_4' : \left(\frac{-Y_1 - Y_2}{\lambda}, \frac{X_1 + X_2}{\lambda}\right),$$

also den Inhalt

$$J_{P'} = \frac{4}{|\lambda|},$$

und somit ist allgemein für Parallelogramm-Paare P und P':

$$J_P J_{P'} = 8. \tag{9}$$

Wir haben damit also gezeigt, dass die Ungleichung (2) ebenfalls im niedersten Fall $n = 4$, d.h. $m = 2$ und zwar sogar in der verschärften Form mit Gleichheitszeichen gültig ist.

§ 3. Beweis der Ungleichungen (1) und (2).

Im letzten Paragraphen haben wir die Ungleichungen (1) und (2) bereits für $n = 3$, bzw. für $n = 4$, $m = 2$ bewiesen. Wir werden jetzt die Richtigkeit für allgemeines n, bzw. m nachweisen, indem wir folgende zwei Sätze zeigen:

Satz 1: Zu jedem polaren Polygon-Paar Π_n und Π'_n, die O im Innern enthalten und die Seitenzahl $n \geqq 4$ und die Inhalte J_n und J'_n besitzen, gibt es ein zweites konvexes Polygon-Paar Π_{n-1} und Π'_{n-1} mit O im Innern, der Seitenzahl $n - 1$ und den Inhalten J_{n-1} und J'_{n-1}, so dass

$$J_{n-1} J'_{n-1} < J_n J'_n$$

ist.

Satz 2: Zu jedem polaren Polygon-Paar Π_{2m}, Π'_{2m} mit Mittelpunkt im Ursprung, der Seitenzahl $2m \geqq 6$ und den Inhalten J_{2m}, J'_{2m} gibt es ein zweites polares Polygon-Paar $\Pi_{2(m-1)}$, $\Pi'_{2(m-1)}$ mit Mittelpunkt im Ursprung, der Seitenzahl $2(m-1)$ und den Inhalten $J_{2(m-1)}$, $J'_{2(m-1)}$, so dass

$$J_{2(m-1)} J_{2(m-1)} < J_{2m} J_{2m}$$

ist.

Beweis von Satz 1: Zu jeder der Seiten $G_1 = P_1P_2$, $G_2 = P_2P_3 \ldots$, $G_n = P_nP_1$ von Π_n gehört ein gewisser Zentriwinkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ vom Ursprung aus; dabei ist

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = 2\pi.$$

Indem wir die Numerierung der Ecken nötigenfalls zyklisch ändern, können wir erreichen, dass

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \min(\varphi_1 + \varphi_2, \varphi_2 + \varphi_3, \ldots, \varphi_n + \varphi_1)$$

ist. Ist nun $n \geqq 5$, so folgt hieraus sofort

$$\varphi_1 + \varphi_2 < \pi. \tag{10}$$

Für $n = 4$ dagegen haben möglicherweise alle vier Winkelsummen

$$\varphi_1 + \varphi_2, \quad \varphi_2 + \varphi_3, \quad \varphi_3 + \varphi_4, \quad \varphi_4 + \varphi_1$$

den gleichen Wert π. Dann müssen offenbar die Paare P_1 und P_3, P_2 und P_4 gegenüberliegender Ecken von Π_4 je auf einer Geraden durch den Nullpunkt liegen. Das polare Polygon Π'_4 hat folglich parallele Gegenseiten, d.h. ist ein Parallelogramm. Falls Π'_4 den Nullpunkt nicht zum Mittelpunkt hat, so geht wenigstens eine seiner beiden Diagonalen nicht durch O; wir vertauschen dann Π'_4 mit Π_4 und gelangen zu einem Viereck, das zwei anstossende Zentriwinkel φ_1, φ_2 mit (10) hat. Liegt dagegen der Mittelpunkt von Π'_4 in O, so ist auch Π_4 ein Parallelegramm, und wegen (9) gilt dann $J_4 J'_4 = 8$. Andrerseits ist für geeignete Dreiecke Π_3, Π'_3 sogar $J_3 J'_3 = \frac{27}{4}$, und somit bleibt in diesem Ausnahmefall überhaupt nichts zu beweisen.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir daher weiterhin annehmen, dass (10) erfüllt ist. Das Dreieck Δ mit den Ecken P_1, P_2, P_3 enthält daher O nicht im Innern oder auf dem Rande, so dass $\delta_\Delta = -1$ ist. Nötigenfalls durch Umkehrung der Nummerierung können wir ferner erreichen, dass $\epsilon_\Delta = +1$ ist. Auf Δ und sein Polardreieck Δ' lässt sich daher das Lemma aus § 2 anwenden.

Durch die Diagonale P_1P_3 zerfällt Π_n in ein konvexes Polygon Π^*_{n-1} von $n-1$ Seiten mit O im Innern, und in das Dreieck Δ: $\Pi_n = \Pi^*_{n-1} + \Delta$. Ist $\Pi^{*\prime}_{n-1}$ das Polarpolygon zu Π^*_{n-1} und Δ' das Polardreieck zu Δ, so liegt Δ' ganz in $\Pi^{*\prime}_{n-1}$ und Π'_n entsteht aus $\Pi^{*\prime}_{n-1}$, indem man aus diesem Polygon das Dreieck Δ' weglässt: $\Pi'_n = \Pi^{*\prime}_{n-1} - \Delta'$.

Wir halten das Polygon Π^*_{n-1} und sein Polarpolygon $\Pi^{*\prime}_{n-1}$ fest, ersetzen aber Δ durch ein variables Dreieck $\Delta(P)$ und entsprechenderweise Δ' durch das hierzu polare, ebenfalls variable Dreieck $\Delta'(P)$, die wir folgendermassen definieren: $\Delta(P)$ habe die Eckpunkte P_1, P, P_3, enthalte O nicht im Innern oder auf dem Rande, besitze denselben Inhalt wie Δ, und das Summenpolygon

$$\Pi_n(P) = \Pi^*_{n-1} + \Delta(P)$$

sei ebenfalls konvex. Polar zu $\Pi_n(P)$ ist alsdann das Differenzpolygon

$$\Pi'_n(P) = \Pi^{*\prime}_{n-1} - \Delta'(P).$$

Gemäss dieser Konstruktion hat $\Pi_n(P)$ denselben Inhalt J_n wie Π_n; der Inhalt $J'_n(P)$ von $\Pi'_n(P)$ dagegen ist bestimmt durch die Formel

$$J'_n(P) = J'_n + J'(P_2) - J'(P), \tag{11}$$

wo $J'(P)$ den Inhalt von $\Delta'(P)$, also insbesondere $J'(P_2)$ den von $\Delta' = \Delta'(P_2)$ bedeutet.

Aus der Definition von $\Delta(P)$ geht hervor, dass P auf einer endlichen Strecke S* der Parallelen G zu P_1P_3 durch P_2 liegen muss; diese Strecke wird auf der einen Seite durch den Schnittpunkt von G mit der Geraden P_nP_1, auf der anderen Seite durch den mit der Geraden P_3P_4 begrenzt. Das Intervall S^* auf G liegt ganz im Innern des durch die Halbgeraden OP_1 und OP_3 begrenzten Winkelraumes. Die Voraussetzungen des Lemmas in § 2 sind daher erfüllt. Folglich wird das absolute Maximum von $J'(P)$ in einem der beiden Endpunkte von S^*, etwa im Punkt P_2' angenommen. Andrerseits muss P_2 ein innerer Punkt von S^* sein, da Π_n ein n-Eck ist; folglich gilt $J'(P_2') > J'(P_2)$. Also hat $\Pi_n'(P_2')$ wegen (11) einen kleineren Inhalt als Π_n'. Die beiden so gefundenen Polygone $\Pi_n(P_2')$ und $\Pi_n'(P_2')$ haben offenbar nur noch $n-1$ Ecken, da der neue Eckpunkt P_2' auf einer der Seiten von Π^*_{n-1} liegt; wir bezeichnen sie deshalb mit Π_{n-1} und Π'_{n-1}, ihre Inhalte mit J_{n-1} und J'_{n-1} und haben dann

$$J_{n-1} = J_n, \quad J'_{n-1} < J'_n,$$

so dass die Behauptung folgt.

Beweis von Satz 2: Wir gehen genau so vor, wie beim vorigen Beweis. Da die Seitenzahl jetzt mindestens 6 ist, so ist die Existenz der beiden Zentriwinkel φ_1, φ_2 mit (10) diesmal von vorne herein sicher. Man kann also P_2 durch einen neuen Endpunkt P_2' ersetzen gemäss der Konstruktion beim vorigen Beweis; es ist dann nur nötig, für P_{m+2} den zu P_2' diametralen Punkt P'_{m+2} zu substituieren, um ein neues polares Polygonpaar $\Pi_{2(m-1)}$ und $\Pi'_{2(m-1)}$ zu erhalten, wovon $\Pi_{2(m-1)}$ die Ecken P_1, P_2', P_3, . . ., P_{m+1}, P'_{m+2}, . . ., P_{2m} hat, so dass dieses Paar allen Forderungen von Satz 2 genügt, da zwei dieser Ecken fortfallen.

Aus Satz 1 und Satz 2 folgen die Ungleichungen (1) und (2) ohne Mühe. So z.B. können wir im Fall der Ungleichung (1) zu Π_n und Π_n' eine Folge polarer Polygonpaare abnehmender Seitenzahl (Π_{n-1}, Π'_{n-1}), (Π_{n-2}, Π'_{n-2}), . . ., (Π_3, Π_3') mit den Inhalten J_{n-1}, J'_{n-1}; J_{n-2}, J'_{n-2}; . . .; J_3, J_3' finden, so dass

$$J_n J_n' > J_{n-1} J'_{n-1} > J_{n-2} J'_{n-2} > \ldots > J_3 J_3'$$

ist; da nach § 2 andererseits $J_3 J_3' \geqq \frac{27}{4}$ ist, so folgt die Behauptung. Es ergibt sich sogar auch noch, wann in (1) und (2) das Gleichheitszeichen stehen kann:

„*Jedes polare konvexe Polygonpaar Π_n, Π_n', das den Ursprung im Innern enthält, genügt der Ungleichung (1); dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn es sich um Dreiecke mit dem Schwerpunkt im Ursprung handelt.*“

Entsprechenderweise folgt:

,,*Jedes polare konvexe Polygonpaar* Π_{2m}, Π_{2m} *mit Mittelpunkt im Ursprung genügt der Ungleichung* (2); *dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn es sich um Parallelogramme handelt.*''

Zum Schluss werde noch auf die analoge Frage für zwei polare konvexe Bereiche K und K′ von den Inhalten J und J′, die den Ursprung im Innern enthalten, bzw. für die dieser der Mittelpunkt ist, eingegangen. Da dieselben sich durch polare Polygonpaare, eventuell mit Mittelpunkt im Ursprung, beliebig genau annähern lassen, so muss auch für solche Bereiche die Ungleichung (1), bzw. (2) zutreffen. Allerdings bleibt bei diesem Beweis ungewiss, wann jetzt das Gleichheitszeichen gilt.

Montana, August 1938. KURT MAHLER.