Об одной теореме Дайсона

К. Малер (Манчестер)

В своей работе [1] Дайсон (F. J. Dyson) обобщает «теорему переноса» Хинчина ([2], предложение VI) на матрицу вещественных чисел (см. [1], теорема 2). Его доказательство аналогично доказательству Хинчина, и в нем используется принцип Дирихле.

В настоящей заметке я доказываю теорему, содержащую главный результат Дайсона (теорема 2) как частный случай. Мой метод значительно проще метода Дайсона и основан на теореме Минковского о линейных формах. Я уже пользовался этим методом в некоторых прежних работах ([3], [4]) для доказательства и обобщения теоремы Хинчина.

Пусть m и n — натуральные числа, подчиненные неравенству $m<n$, так что $m\geqslant 1$, $n\geqslant 2$. Обозначим через

$$f_h(x)=\sum_{k=1}^{n} a_{hk}x_k,\quad g_h(y)=\sum_{k=1}^{n} b_{hk}y_k\quad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

две системы линейных форм, для которых выполняются следующие условия:

1) Определитель

$$d=\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n}\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ b_{n1} & \ldots & b_{nn}\end{vmatrix}$$

равен ± 1.

2) m линейных форм

$$g_h(y)\quad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

и билинейная форма

$$\Phi(x,y)=\sum_{h=1}^{n} f_h(x)\,g_h(y)=\sum_{h,\,k=1}^{n} e_{hk}x_h y_k$$

имеют целые коэффициенты b_{hk}, e_{hk}.

Обозначим, далее, через

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

n положительных чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$a_h \begin{cases} \geqslant 1 & (h = 1, 2, \ldots, m), \\ \leqslant 1 & (h = m+1, m+2, \ldots, n); \end{cases}$$

положим

$$P = \prod_{h=1}^{n} a_h, \quad M = \max_{1 \leqslant h \leqslant m} a_h, \quad \mu = \min_{m+1 \leqslant h \leqslant n} a_h$$

и

$$F(z) = z \prod_{h=1}^{m} \max\left(1, \frac{a_h}{z}\right) \prod_{h=m+1}^{n} \min\left(1, \frac{a_h}{z}\right).$$

Лемма*. *Существует единственное число z, удовлетворяющее соотношениям*

$$F(z) = 1, \quad \mu \leqslant z \leqslant M.$$

При этом

$$z \leqslant 1, \text{ если } P \leqslant 1, \text{ и } z > 1, \text{ если } P > 1.$$

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждения, мы можем допустить, что $a_1 = M$ и $a_n = \mu$. Для $\mu \leqslant z \leqslant M$ функция

$$z \max\left(1, \frac{M}{z}\right) \min\left(1, \frac{\mu}{z}\right) = \frac{M\mu}{z}$$

— непрерывная и строго убывающая, а все функции

$$\max\left(1, \frac{a_h}{z}\right), \ \min\left(1, \frac{a_h}{z}\right)$$

— непрерывные и невозрастающие. Произведение**

$$F(z) = z \max\left(1, \frac{M}{z}\right) \min\left(1, \frac{\mu}{z}\right) \prod_{h=2}^{m} \max\left(1, \frac{a_h}{z}\right) \prod_{h=m+1}^{n-1} \min\left(1, \frac{a_h}{z}\right)$$

поэтому непрерывно и строго убывает. Далее,

$$F(\mu) = \frac{a_1 a_2 \ldots a_m}{\mu^{m-1}} \geqslant 1, \quad F(M) = \frac{a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_n}{M^{n-m+1}} \leqslant 1, \quad F(1) = P,$$

чем утверждение леммы и доказано.

---

* Ср. [1], стр. 411—412.

** Если какое-либо из произведений $\prod\limits_{h=2}^{m}$ и $\prod\limits_{h=m+1}^{n-1}$ пусто, то его следует заменить единицей.

Теорема 1. *Если существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые не все равны нулю и для которых*

$$|f_h(x)| \begin{cases} \leqslant \frac{1}{a_h} & (h = 1, 2, \ldots, n-1), \\ = \frac{1}{a_n} & (h = n), \end{cases} \qquad (1)$$

то существуют также целые числа $y_1, y_2 \ldots, y_n$, которые не все обращаются в нуль и для которых

$$|g_h(y)| \begin{cases} < \max\left(1, \frac{a_h}{z}\right) & (h = 1, 2, \ldots, m), \\ \leqslant \min\left(1, \frac{a_h}{z}\right) & (h = m+1, m+2, \ldots, n-1), \\ \leqslant (n-1)\min\left(1, \frac{a_n}{z}\right) & (h = n). \end{cases} \qquad (2)$$

Доказательство. Допустим сперва, что $P \leqslant 1$, и, следовательно, $z \leqslant 1$. Тогда произведение правых частей неравенств (2)

$$(n-1)\prod_{h=1}^{m} \max\left(1, \frac{a_h}{z}\right) \prod_{h=m+1}^{n} \min\left(1, \frac{a_h}{z}\right) = \frac{n-1}{z} F(z) = \frac{n-1}{z} \geqslant 1.$$

Так как определитель системы линейных форм $g_h(y)$ равен ± 1, то утверждение теоремы 1 непосредственно следует из теоремы Минковского о линейный формах.

Допустим теперь, что $P > 1$, и, следователььо, $z > 1$; тогда

$$\min\left(1, \frac{a_h}{z}\right) = \frac{a_h}{z} \quad (h = m+1, m+2, \ldots, n).$$

По определению формы $\Phi(x, y)$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = \sum_{h=1}^{n} f_h(x)\, b_{hk} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Определитель

$$D = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & & b_{n-1,n} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial \Phi}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

системы линейных форм

$$g_1(y),\ g_2(y),\ \ldots,\ g_{n-1}(y),\ \Phi(x, y)$$

в переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ равен поэтому

$$D = df_n(x) = \pm f_n(x),$$

откуда, в силу условий (1),

$$|D| = \frac{1}{a_n}.$$

Согласно теореме Минковского о линейных формах, отсюда следует, что неравенства

$$|\Phi(x, y)| < 1, \tag{3}$$

$$|g_h(y)| \begin{cases} < \max\left(1, \frac{a_h}{z}\right) & (h = 1, 2, \ldots, m), \\ \leqslant \frac{a_h}{z} & (h = m+1, m+2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

могут быть решены в целых $y_1, y_2, \ldots, y_n$, которые не все равны нулю; в самом деле, произведение правых частей этих неравенств равно

$$1 \cdot \prod_{h=1}^{m} \max\left(1, \frac{a_h}{z}\right) \prod_{h=m+1}^{n-1} \min\left(1, \frac{a_h}{z}\right) = \frac{F(z)}{z \min\left(1, \frac{a_n}{z}\right)} = \frac{1}{a_n}.$$

Так как форма $\Phi(x, y)$, в силу допущения 2), имеет целые коэффициенты, то из неравенства (3) следует:

$$\Phi(x, y) = 0,$$

откуда

$$|f_n(x) g_n(y)| \leqslant \sum_{h=1}^{m} |f_h(x) g_h(y)| + \sum_{h=m+1}^{n-1} |f_h(x) g_h(y)| = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

В первой сумме Σ_1 мы имеем:

$$|f_h(x) g_h(y)| \leqslant \frac{1}{z} \quad (1 \leqslant h \leqslant m),$$

так как либо

$$\max\left(1, \frac{a_h}{z}\right) = 1, \quad |g_h(y)| < 1,$$

откуда $g_h(y)$, будучи целым числом, должно равняться нулю, либо

$$\max\left(1, \frac{a_h}{z}\right) = \frac{a_h}{z}, \quad |f_h(x) g_h(y)| \leqslant \frac{1}{a_h} \cdot \frac{a_h}{z} = \frac{1}{z}.$$

Это же неравенство

$$|f_h(x) g_h(y)| \leqslant \frac{1}{a_h} \cdot \frac{a_h}{z} = \frac{1}{z}$$

имеет место и для каждого члена второй суммы Σ_2. Таким образом,

$$\Sigma_1 \leqslant \frac{m}{z}, \quad \Sigma_2 \leqslant \frac{n-m-1}{z}, \quad |f_n(x) g_n(y)| \leqslant \frac{n-1}{z},$$

и, следовательно, так как $|f_n(x)| = \frac{1}{a_n}$,

$$|g_n(y)| \leqslant (n-1) \frac{a_n}{z},$$

чем теорема 1 полностью доказана.*

Положим теперь в теореме 1

$$f_h(x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=m+1}^{n}\theta_{hk}x_k-x_h & (h=1,\ 2,\ \ldots,\ m),\\ x_h & (h=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n),\end{cases}$$

$$g_h(y)=\begin{cases}-y_h & (h=1,\ 2,\ \ldots,\ m),\\ \sum\limits_{k=1}^{m}\theta_{kh}y_k-y_h & (h=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n),\end{cases}$$

где

$$\theta_{hk}\quad (h=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad k=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n)$$

— вещественные числа. Тогда

$$\sum_{h=1}^{n}f_h(x)\,h_h(y)=\sum_{h=1}^{m}x_hy_h-\sum_{h=m+1}^{n}x_hy_h,$$

и обе системы линейных форм $\{f_h(x)\}$ и $\{g_h(y)\}$ имеют определители, равные ± 1; кроме того, первые m форм $g_h(y)$ имеют целочисленные коэффициенты. Таким образом, предпосылки 1) и 2) выполнены, и мы можем применить теорему 1. При этом, очевидно, для целочисленных переменных условия

$$|f_h(x)|<1\ \ (h=1,\ 2,\ \ldots,\ m),\quad f_h(x)=0\ \ (h=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n)$$

или условия

$$g_h(y)=0\ \ (h=1,\ 2,\ \ldots,\ m),\quad |g_h(y)|<1\ \ (h=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n)$$

означают, что все переменные обращаются в нуль.

Достаточно поэтому положить

$$a_h=\begin{cases}S^{\alpha_h} & (h=1,\ 2,\ \ldots,\ m),\\ S^{-\alpha_h} & (h=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n),\end{cases}$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ — неотрицательные вещественные числа, а S — большое положительное число, чтобы получить теорему Дайсона, за исключением его множителей A и B. Можно было бы небольшим видоизменением метода получить и в точности его результат.

(Поступило в редакцию 23/IX 1948 г.)

---

* Легко показать, что в случае $P\geqslant 1$

$$z\geqslant P^{\frac{1}{n-1}}.$$

Таким образом, в этом случае теорема 1 сильнее, чем предложение 1 моей работы [4].

Литература

1. F. J. Dyson, On simultaneous diophantine approximations, Proc. Lond. Math Soc. (2), **49** (1947), 409—420.
2. A. Khintchine, Über eine Klasse linearer Diophantischer Approximationen, Rend. Circ. Mat. Palermo, **50** (1926), 170—195.
3. Kurt Mahler, Neuer Beweis einer Satzes von A. Khintchine, Мат. сб., **1** (**43**) (1936), 961—962.
4. Kurt Mahler, Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen, Časopis pro pěstování' matematiky a fysiky, **68** (1939), 85—92.