АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

ТОМ 2

ВЫПУСК 1

1967

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 2, № 1 (1967), 25—32

ОБ ОДНОЙ ЛЕММЕ А. Б. ШИДЛОВСКОГО

К. Малер

А. Б. Шидловский в работе [1] доказал несколько важных теорем об алгебраической независимости значений E-функций Зигеля в алгебраических точках. Эти исследования основываются на лемме о линейных дифференциальных уравнениях, которая сама по себе представляет интерес. Доказательство Шидловского основывается на довольно своеобразном индуктивном методе. В этой работе предлагается новое доказательство, основанное на линейной алгебре.

Обозначим через C, $R = C(z)$ и K соответственно — поле комплексных чисел, поле рациональных функций и поле всех аналитических функций от z, которые могут иметь в точке $z = 0$ самое большее полюс и являются регулярными в некоторой окрестности $z = 0$.

ЛЕММА Шидловского будет установлена в следующей форме:

Пусть

$$Q: \quad w_h' = \sum_{k=1}^{m} q_{hk} w_k, \qquad h = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

есть система линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами q_{hk} *из* R, *которые являются регулярными при* $z = 0$, *а функции из* K $w_1 = f_1(z), \ldots, w_m = f_m(z)$ *составляют решение системы* Q, *причем среди них имеется ровно* μ *линейно независимых над* R, $1 \leqslant \mu \leqslant m - 1$.

Тогда из этих функций можно выбрать μ *функций* $w_{i_1} = f_{i_1}(z), \ldots, w_{i_\mu} = f_{i_\mu}(z)$ *так, что они будут линейно*

Перевод с английского И. И. Белогривова

независимы над R и образуют решение другой системы дифференциальных уравнений

$$Q^0: \quad w'_{i_h} = \sum_{k=1}^{\mu} q^0_{hk} w_{i_k}, \quad h = 1, \ldots, \mu,$$

где все коэффициенты q^0_{hk} также принадлежат R и являются регулярными при $z = 0$.

1. Для доказательства будем пользоваться матричными обозначениями

$$q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

и аналогичными обозначениями в других случаях. Тогда Q эквивалентна матричному уравнению

$$Q: \quad \boldsymbol{w}' = q\boldsymbol{w}.$$

Пусть коэффициенты q_{hk} системы Q пока являются произвольными функциями из R и не обязательно регулярны при $z = 0$. Множество V_Q всех решений $\boldsymbol{w}$ системы Q с компонентами из K, очевидно, составляет линейное векторное пространство над C. Обозначим через M его размерность над C. Из теории аналитических функций известно, что

$$0 \leqslant M \leqslant m. \tag{2}$$

В частном случае, когда все q_{hk} являются регулярными при $z = 0$, размерность $M = m$ и все компоненты любого решения системы Q также регулярны при $z = 0$.

Вместе с V_Q рассмотрим множество Λ линейных форм

$$\lambda = \lambda(\boldsymbol{w}) = p_1 w_1 + \ldots + p_m w_m$$

с коэффициентами $p_1, \ldots, p_m$ из R. Переменный вектор $\boldsymbol{w}$ всегда предполагается принадлежащим V_Q. Наложим ограничение на Λ, потребовав, чтобы оно составляло линейное векторное пространство над R. Так что, если $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ и $b_1, b_2 \in R$, то $b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 \in \Lambda$.

Обозначим через n размерность Λ над R. Тогда

$$0 \leqslant n \leqslant m. \tag{3}$$

независимы над R и образуют решение другой системы дифференциальных уравнений

$$Q^0: \quad w'_{i_h} = \sum\nolimits_{k=1}^{\mu} q^0_{hk} w_{i_k}, \qquad h = 1, \ldots, \mu,$$

где все коэффициенты q^0_{hk} также принадлежат R и являются регулярными при $z = 0$.

1. Для доказательства будем пользоваться матричными обозначениями

$$q = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{mm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

и аналогичными обозначениями в других случаях. Тогда Q эквивалентна матричному уравнению

$$Q: \qquad \boldsymbol{w}' = q\boldsymbol{w}.$$

Пусть коэффициенты q_{hk} системы Q пока являются произвольными функциями из R и не обязательно регулярны при $z = 0$. Множество V_Q всех решений $\boldsymbol{w}$ системы Q с компонентами из K, очевидно, составляет линейное векторное пространство над C. Обозначим через M его размерность над C. Из теории аналитических функций известно, что

$$0 \leqslant M \leqslant m. \tag{2}$$

В частном случае, когда все q_{hk} являются регулярными при $z = 0$, размерность $M = m$ и все компоненты любого решения системы Q также регулярны при $z = 0$.

Вместе с V_Q рассмотрим множество Λ линейных форм

$$\lambda = \lambda(\boldsymbol{w}) = p_1 w_1 + \ldots + p_m w_m$$

с коэффициентами $p_1, \ldots, p_m$ из R. Переменный вектор $\boldsymbol{w}$ всегда предполагается принадлежащим V_Q. Наложим ограничение на Λ, потребовав, чтобы оно составляло линейное векторное пространство над R. Так что, если $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ и $b_1, b_2 \in R$, то $b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 \in \Lambda$.

Обозначим через n размерность Λ над R. Тогда

$$0 \leqslant n \leqslant m. \tag{3}$$

где коэффициенты u_{hk} являются некоторыми рациональными функциями.

Из этого следует, что новая система дифференциальных уравнений

$$U:\quad W_h' = \sum_{k=1}^{n} u_{hk} W_k, \qquad h = 1, \ldots, n,$$

которая имеет коэффициенты из R, допускает для каждого $\boldsymbol{w} \in V_Q$ решение

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} \lambda_1(\boldsymbol{w}) \\ \vdots \\ \lambda_n(\boldsymbol{w}) \end{pmatrix}$$

с компонентами $\lambda_h(\boldsymbol{w})$ из K. Система U является системой такого же вида, что и Q, и, таким образом, в силу (2) векторное пространство V_U всех его решений с компонентами из K имеет размерность над C самое большее n. С другой стороны, подставляя вместо $\boldsymbol{w}$ базисные элементы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_M$ пространства V_Q, мы получим M частных решений $\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{v}_1), \ldots, \boldsymbol{W}_M = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{v}_M)$ системы U, среди которых самое большее n решений могут быть линейно независимыми над C. Из этого следует, что существует некоторая невырожденная матрица с постоянными элементами

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1M} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{M1} & \ldots & a_{MM} \end{pmatrix}$$

такая, что

$$\boldsymbol{W}_1 a_{1k} + \ldots + \boldsymbol{W}_M a_{Mk} = \boldsymbol{0}, \qquad k = 1, \ldots, M - n, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{0}$ обозначает нулевой вектор.

Полагая

$$\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{v}_1 a_{1k} + \ldots + \boldsymbol{v}_M a_{Mk}, \qquad k = 1, \ldots, M,$$

получим, что $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_M$ также образуют базис V_Q. Поскольку

$$\lambda_h(\boldsymbol{w}_k) = \lambda_h(\boldsymbol{v}_1) a_{1k} + \ldots + \lambda_h(\boldsymbol{v}_M) a_{Mk},$$
$$h = 1, \ldots, n, \qquad k = 1, \ldots, M,$$

уравнение (4) дает

$$\lambda_h(\boldsymbol{w}_k) = 0, \quad h = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, M - n.$$

Отсюда получается следующий результат: если V_Q и Λ удовлетворяют условиям а) и б), то существует некоторый базис $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_M$ пространства V_Q такой, что $\lambda(\boldsymbol{w}_k) = 0$, для $k = 1, \ldots, M - n$ при всех $\lambda \in \Lambda$.

4. Доказательство леммы. Как следует из условия леммы, размерность V_Q над C равна $M = m$. Выберем за Λ векторное пространство всех линейных форм λ с коэффициентами из R, для которых

$$\lambda(\boldsymbol{f}) = 0, \tag{5}$$

где

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_m(z) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Из предположения следует, что $m - \mu$ компонент $\boldsymbol{f}$ могут быть записаны как линейные формы с коэффициентами из R от оставшихся μ компонент. Это означает, что Λ имеет размерность $n = m - \mu$ над R. Но тогда $M - n = \mu > 0$ и условие б) выполняется.

Условие а) также имеет место, так как из (5) следует, что

$$\lambda^*(\boldsymbol{f}) = \frac{d}{dz}\lambda(\boldsymbol{f}) = 0.$$

Так что Λ является замкнутым относительно дифференцирования. Отсюда, по доказанному в п. 3, существует некоторый базис $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ пространства V_Q, удовлетворяющий условию

$$\lambda(\boldsymbol{w}_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, \mu, \tag{6}$$

для всех λ со свойством $\lambda(\boldsymbol{f}) = 0$.

Обозначим через $w_{1k}, \ldots, w_{mk}$ компоненты $\boldsymbol{w}_k$ и через w матрицу

$$w = \begin{pmatrix} w_{11} \ldots w_{1m} \\ \ldots\ldots \\ w_{m1} \ldots w_{mm} \end{pmatrix}.$$

Определитель $D(z)$ матрицы w не является тождественным нулем. Поскольку $z=0$ является регулярной точкой Q, то из теории линейных дифференциальных уравнений следует, что

$$D(0) \neq 0. \tag{7}$$

5. Далее, обозначим через $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_\mu, i'_1, \ldots, i'_{m-\mu})$ любой набор из чисел $1, \ldots, m$, для которого $i_1 < i_2 < \ldots < i_\mu$; $i'_1 < i'_2 < \ldots < i'_{m-\mu}$, и для каждого такого набора введем два дополнительных определителя:

$$D(z; \boldsymbol{i}) = \begin{vmatrix} w_{i_1, 1} \ldots w_{i_1, \mu} \\ \ldots\ldots \\ w_{i_\mu, 1} \ldots w_{i_\mu, \mu} \end{vmatrix},$$

$$D'(z; \boldsymbol{i}) = \begin{vmatrix} w_{i'_1, \mu+1} \ldots & w_{i'_1, m} \\ \ldots\ldots \\ w_{i'_{m-\mu}, \mu+1} \ldots & w_{i'_{m-\mu}, m} \end{vmatrix}.$$

Эти определители являются регулярными при $z=0$. Поэтому, применяя теорему Лапласа, получим для $D(z)$ разложение

$$D(z) = \sum_i \pm D(z; \boldsymbol{i}) D'(z; \boldsymbol{i}),$$

где суммирование распространяется на всевозможные наборы $\boldsymbol{i}$. Далее, из (7) следует, что $\boldsymbol{i}$ можно выбрать так, что

$$D(0, \boldsymbol{i}) \neq 0. \tag{8}$$

Это неравенство означает, во-первых, что $f_{i_1}, \ldots, f_{i_\mu}$ являются линейно независимыми над R. Ибо, если

$$p_{i_1} f_{i_1} + \ldots + p_{i_\mu} f_{i_\mu} = 0,$$

при некоторых рациональных функциях $p_{i_1}, \ldots, p_{i_\mu}$, которые не все тождественно равны нулю, то из (6) следует:

$$p_{i_1} w_{i_1, k} + \ldots + p_{i_\mu} w_{i_\mu, k} = 0, \qquad k = 1, \ldots, \mu,$$

что противоречит неравенству $D(z; \boldsymbol{i}) \not\equiv 0$.

Поскольку $f_{i_1}, \ldots, f_{i_\mu}$ являются линейно независимыми над R, то существуют $\mu(m-\mu)$ рациональных функций d_{hj} таких, что

$$f_{i'_j} = \sum_{h=1}^{\mu} d_{hj} f_{i_h}, \quad j = 1, \ldots, m - \mu.$$

Согласно (6) это означает также, что

$$w_{i'_j,\, k} = \sum_{h=1}^{\mu} d_{hj} w_{i_h,\, k},$$

$$j = 1, \ldots, m - \mu, \quad k = 1, \ldots, \mu.$$

Для каждого фиксированного j и каждого $k = 1, \ldots, \mu$ это есть система из μ линейных уравнений для определения $d_{1j}, \ldots, d_{\mu j}$ с определителем $D(z; \boldsymbol{i}) \not\equiv 0$. Эта систем- имеет решение в виде

$$\left.\begin{aligned} d_{hj} = D_{hj}(z; \boldsymbol{i})/D(z; \boldsymbol{i}), \\ h = 1, \ldots, \mu, j = 1, \ldots, m - \mu, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где $D_{hj}(z; \boldsymbol{i})$ обозначает определитель, который получается из $D(z; \boldsymbol{i})$ заменой строки $w_{i_h,\,1}, \ldots, w_{i_h,\,\mu}$ на $w_{i'_j,\,1}, \ldots, w_{i'_j,\,\mu}$. Из (9) видно, что определители $D_{hj}(z; \boldsymbol{i})$ являются регулярными при $z = 0$, а тогда из (8) и (9) следует, что все рациональные функции d_{hj} регулярны при $z = 0$.

6. Рассмотрим, наконец, множество W_Q всех тех решений $\boldsymbol{w}$ системы Q, для которых

$$w_{i'_j} = \sum_{h=1}^{\mu} d_{hj} w_{i_h}, \quad j = 1, \ldots, m - \mu. \tag{10}$$

Это множество W_Q является векторным пространством над C и подпространством V_Q. Оно содержит, в частности, и решение $\boldsymbol{f}$.

Рассмотрим совместно два m-мерных вектора

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

с двумя μ-мерными векторами

$$\boldsymbol{w}^0 = \begin{pmatrix} w_{i_1} \\ \vdots \\ w_{i_\mu} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}^0 = \begin{pmatrix} f_{i_1} \\ \vdots \\ f_{i_\mu} \end{pmatrix}.$$

Если $\boldsymbol{w} \in W_Q$, то уравнение (10) позволяет исключить из μ уравнений

$$w_{i'_h} = \sum_{k=1}^{m} q_{i_h, k} w_k, \quad h = 1, \ldots, \mu,$$

системы $Qm - \mu$ компонент $w_{i'_1}, \ldots, w_{i'_{m-\mu}}$. Следовательно,

$$w_{i'_h} = \sum_{k=1}^{\mu} q_{i_h i_k} w_{i_k} + \sum_{j=1}^{m-\mu} \sum_{k=1}^{\mu} q_{i_h i'_j} d_{kj} w_{i_k},$$
$$h = 1, \ldots, \mu.$$

Отсюда μ-мерный вектор $\boldsymbol{w}^0$ удовлетворяет новой системе дифференциальных уравнений

$$Q^0: \quad w_{i'_h} = \sum_{k=1}^{\mu} q^0_{hk} w_{i_k}, \quad h = 1, \ldots, \mu,$$

где

$$q^0_{hk} = q_{i_h i_k} + \sum_{j=1}^{m-\mu} q_{i_h i'_k} d_{kj}, \quad h, k = 1, \ldots, \mu.$$

Теперь из условия леммы и доказанного в конце п. 5 следует, что q_{hk} и d_{kj} — рациональные функции от z, регулярные при $z = 0$. Это также справедливо и для всех q^0_{hk}.

Утверждение доказано, так как $\boldsymbol{f}^0$, очевидно, есть решение новой системы Q^0.

Канберра, Австралийский
национальный университет

Поступило
5.IV.1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Шидловский А. Б., О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций, связанных любым числом алгебраических уравнений в поле рациональных функций, Изв. АН СССР. Сер. матем., 26, № 6 (1962), 877—910.