Perfect systems

by

K. Mahler (Canberra)

During the years of 1934-5, while working as a refugee from Germany at the University of Groningen (Netherlands), I wrote a longish paper on the formal approximation theory of analytic functions by rational functions. Both then and in later years, I have repeatedly and in different places lectured on the results of this paper, but for one reason or the other the paper so far has not been published.

In recent years, H. Jager (1964) and J. Coates (1966), to whom I had given access to my paper, extended my results in different directions and obtained interesting results of their own. Neither of them dealt in detail with the later sections of my paper which are concerned with the transfer matrices P and $\mathfrak{P}$. Since these matrices seem to me to be of importance, both for theoretical reasons and for possible use in numerical work, I have now decided to publish the paper, but to leave it in its original German form without any essential changes.

My work goes back to three basic papers by Hermite (1873a, 1873b, and 1893) which deal with the best possible formal rational approximations of exponential functions. The problem I consider deals with general analytic functions, and in a slightly specialised form can be stated as follows.

Let $m \geqq 2$, and let $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ be m analytic functions that are regular in a neighbourhood of the point $z = 0$ and do not all vanish at this point. Let $\rho_1, \ldots, \rho_m$ be any m non-negative integers of the sum $\sigma = \rho_1 + \ldots + \rho_m$. Then there exist, firstly, m polynomials

$$a_k(z) = a_k(z \mid \rho_1, \ldots, \rho_m) \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

at most of the degrees $\rho_1 - 1, \ldots, \rho_m - 1$, respectively, which do not all vanish identically and have the property that

$$r(z) = r(z \mid \rho_1, \ldots, \rho_m) = \sum_{k=1}^{m} a_k(z) f_k(z) \tag{2}$$

vanishes at $z=0$ at least to the order $\sigma-1$. Secondly, there also exist m polynomials

$$\mathfrak{a}_k(z)=\mathfrak{a}_k(z\mid\rho_1,\ldots,\rho_m)\qquad(k=1,2,\ldots,m)\tag{3}$$

at most of the degrees $\sigma-\rho_1,\ldots,\sigma-\rho_m$, respectively, which likewise do not all vanish identically and for which all the functions

$$\mathfrak{r}_{kl}(z)=\mathfrak{r}_{kl}(z\mid\rho_1,\ldots,\rho_m)=\mathfrak{a}_l(z)f_k(z)-\mathfrak{a}_k(z)f_l(z)\qquad(k,l=1,2,\ldots,m)\tag{4}$$

have zeros at least of order $\sigma+1$ at $z=0$.

We now say that the m functions $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ form a *perfect system* if, for every choice of the parameters $\rho_1,\ldots,\rho_m$, each of the polynomials $a_k(z)$ can only have the exact degree ρ_k-1. As is proved in this paper, this implies analogous properties for the polynomials $\mathfrak{a}_k(z)$, and many other non-obvious properties of the functions (1), (2), (3), and (4).

The simplest example of a perfect system is given by the m functions

$$e^{\omega_1 z},\ldots,e^{\omega_m z},\text{ where }\omega_k\neq\omega_l\text{ for }k\neq l.$$

This is the system of functions studied by Hermite, and it was essentially their property of perfectness which allowed his classical proof of the transcendency of e. In a paper of many years later (Mahler 1932) I applied the perfectness of this system to the study of the rational and algebraic approximations of algebraic powers of e.

Another example of a perfect system is given by

$$(1+z)^{\omega_1},\ldots,(1+z)^{\omega_m},\text{ where }\omega_k-\omega_l\neq\text{integer for }k\neq l$$

(Mahler 1931). Further examples have recently been obtained by Jager and Coates in the papers quoted above.

In the case of perfect systems, each of the two sets of polynomials $a_k(z)$ and $\mathfrak{a}_k(z)$ is determined uniquely up to a common constant factor which is at our disposal. Of particular interest is now the question how these polynomials depend on the parameters $\rho_1,\ldots,\rho_m$. One possible way of studying this question is as follows.

Denote by $(\rho_{hk})_{h,k=1,2,\ldots,m}$ an $m\times m$ matrix of non-negative integers ρ_{hk}. With this matrix of integers one can then form the two matrices of polynomials

$\left(a_k(z|\rho_{h1}, \ldots, \rho_{hm})\right)_{h,k=1,2,\ldots,m}$ and $\left(\mathfrak{a}_k(z|\rho_{h1}, \ldots, \rho_{hm})\right)_{h,k=1,2,\ldots,m}$ which are obtained by allowing the parameters $\rho_1, \ldots, \rho_m$ to run successively over the m rows of (ρ_{hk}). In this paper, one chooses

$$\rho_{hk} = \begin{cases} \rho_k & \text{if } h \neq k, \\ \rho_k+1 & \text{if } h = k, \end{cases}$$

for the polynomials (1), and

$$\rho_{hk} = \begin{cases} \rho_k & \text{if } h \neq k, \\ \rho_k-1 & \text{if } h = k, \end{cases}$$

for the polynomials (3), respectively. The resulting polynomial matrices, denoted by

$$A(z \mid \rho_1, \ldots, \rho_m) \text{ and } \mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \ldots, \rho_m),$$

can be normed so as to have determinants equal to z^σ and $z^{(m-1)\sigma}$, respectively, and then further

$$A(z \mid \rho_1, \ldots, \rho_m)\mathfrak{A}'(z \mid \rho_1, \ldots, \rho_m) = z^\sigma E, \tag{5}$$

where E is the unit matrix, and the dash denotes the transposed matrix.

Let now $\rho_1', \ldots, \rho_m'$ be a second system of parameters satisfying

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} \rho_k \leqq \sigma' = \sum_{k=1}^{m} \rho_k'.$$

It can then be proved that all the elements of the two matrix quotients

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = A(z \mid \rho_1', \ldots, \rho_m')A(z \mid \rho_1, \ldots, \rho_m)^{-1}$$

and

$$\mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) = \mathfrak{A}(z \mid \rho_1', \ldots, \rho_m')\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \ldots, \rho_m)^{-1}$$

are again polynomials.

Of particular interest is the case when $\rho_k' = \rho_k+1$ for all k, for now it is found that

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, \ldots, \rho_m+1 \\ \rho_1\;, \ldots, \;\rho_m \end{matrix}\right) = zE+P(\rho_1, \ldots, \rho_m),$$

where $P(\rho_1, \ldots, \rho_m)$ is a certain constant matrix depending on the parameters $\rho_1, \ldots, \rho_m$, which has the determinant z^m. Thus, on putting $\rho_1 = \ldots = \rho_m, = \rho$ say, this suggests the following construction.

Denote by $P_1, P_2, P_3, \ldots$ an infinite sequence of constant $m \times m$ matrices such that, for every suffix ρ, the determinant of $zE + P_\rho$ is equal to z^m, and put

$$(6) \quad A(z \mid \rho) = (zE+P_\rho)(zE+P_{\rho-1}) \ldots (zE+P_1) \quad (\rho = 1, 2, 3, \ldots).$$

The matrix $A(z \mid \rho)$ is non-singular. One can now put the question whether there exists a perfect system $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ such that

$$A(z \mid \rho, \ldots, \rho) = A(z \mid \rho) \quad (\rho = 1, 2, 3, \ldots)?$$

If this conjecture should prove to be correct, the sequence (6) would lead to the construction of perfect systems by means of a simple algorithm.

My paper raises other questions, in particular that of generalising the notion of perfect system. I shall mention only one of the possible generalisations which seems to be of particular interest.

Let $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ be again functions that are regular in a neighbourhood of $z = 0$. These functions need not now form a perfect system, but they are assumed to have the following weaker property.

There exists a positive constant integer c such that, for every set of m non-negative integers $\rho_1, \ldots, \rho_m$ and for every set of m polynomials $a_1(z), \ldots, a_m(z)$ that do not all vanish identically and have at most the degrees $\rho_1 - 1, \ldots, \rho_m - 1$, respectively, the function

$$r(z) = \sum_{k=1}^{m} a_k(z) f_k(z)$$

vanishes at the point $z = 0$ at most to the order $\rho_1 + \ldots + \rho_m + c$.

If this condition is satisfied, $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ will be said to form a *near-perfect system*. Such near-perfect systems seem to be of importance in analysis, as the following example shows.

It is implicit in work by A. G. Shidlovski (1959 and 1962) that, *if $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ are regular in a neighbourhood of $z = 0$, are linearly independent over the field of rational functions, and if, further, they satisfy a system of homogeneous linear differential equations*

$$f_h'(z) = \sum_{k=1}^{m} q_{hk}(z) f_k(z) \quad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

where the coefficients $q_{hk}(z)$ are rational functions, then $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ form a near-perfect system.

The proofs of this paper make it evident that there holds for near-perfect systems a theory which is very similar to that for perfect systems. The main difference in the definition of the polynomial matrices $A(z \mid \rho_1, \ldots, \rho_m)$ and $\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \ldots, \rho_m)$ is now expressed in a different choice of the parameter matrices (ρ_{hk}). One would take for the A-matrix

$$\rho_{hk} = \begin{cases} \rho_k & \text{for } h \neq k, \\ \rho_k + C & \text{for } h = k, \end{cases}$$

and for the $\mathfrak{A}$-matrix,

$$\rho_{hk} = \begin{cases} \rho_k & \text{for } h \neq k, \\ \rho_k - C & \text{for } h = k. \end{cases}$$

Here C denotes a sufficiently large positive integer which does not depend on the parameters $\rho_1, \ldots, \rho_m$. With this choice of (ρ_{hk}), the new polynomial matrices $A(z \mid \rho_1, \ldots, \rho_m)$ and $\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \ldots, \rho_m)$ remain non-singular; but their determinants become now powers of z multiplied by polynomials of bounded degrees. Similarly, the elements of the matrices P and $\mathfrak{P}$ are now rational functions with denominators of bounded degrees.

Vollkommene Systeme

I.

1.) Sei G ein Gebiet in der z-Ebene und

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

eine unendliche Folge von gleichen oder verschiedenen Punkten in diesem Gebiet, ferner zur Abkürzung

$$\psi_0(z) = 1, \quad \psi_\lambda(z) = \prod_{\mu=1}^{\lambda} (z - z_\mu) \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Eine in G reguläre Funktion $f(z)$ heisse *von der Ordnung* λ, wenn wohl die Funktion

$$\frac{f(z)}{\psi_\lambda(z)}$$

noch in G regulär ist, nicht aber mehr die Funktion

$$\frac{f(z)}{\psi_{\lambda+1}(z)}.$$

Dafür werde in Zeichen

$$\left\lfloor f(z) \right\rfloor = \lambda$$

geschrieben.

Entsprechend werde der *genaue Grad* eines Polynoms $a(z)$ mit

$$\left\lceil a(z) \right\rceil$$

bezeichnet und, wenn dieses Polynom identisch verschwindet, gleich -1 gesetzt.

2.) Seien im Folgenden [1])

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z) \qquad (m \geqq 2)$$

endlich viele Funktionen, die in G regulär sind und die in keinem der unendlich vielen Punkte

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

alle gleichzeitig verschwinden. Ferner seien

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

m beliebige nicht-negative ganze Zahlen, etwa mit der Summe

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} \rho_k.$$

Wir bezeichnen mit

$$a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

irgend ein System von m Polynomen, die nicht alle identisch verschwinden und zusammen mit der Funktion

$$r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{k=1}^{m} a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z)$$

den Ungleichungen

$$\left\lceil a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right\rceil \leqq \rho_k - 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\left\lfloor r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right\rfloor \geqq \sigma - 1$$

genügen. *Es gibt immer solche Systeme.* Denn die Polynome besitzen zusammen σ Koeffizienten, und diese sollen offenbar $\sigma-1$ homogenen linearen Gleichungen genügen; ein solches Gleichungssystem ist aber immer lösbar, ohne dass alle Unbekannte verschwinden.

[1] Der Fall $m = 1$ ist uninteressant.

Weiter bezeichnen wir mit

$$\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

irgend ein System von m Polynomen, die nicht alle identisch verschwinden und zusammen mit den Funktionen

$$\mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \mathfrak{a}_l(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z) - \mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_l(z)$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

den Bedingungen

$$\boxed{\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)} \leqq \sigma - \rho_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$
$$\boxed{\mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)} \geqq \sigma + 1 \quad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

genügen. *Auch solche Systeme gibt es immer.* Denn offenbar besitzen die Polynome zusammen $(m-1)(\sigma+1)+1$ Koeffizienten. Andrerseits bestehen die Identitäten

$$\mathfrak{r}_{kk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \equiv 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \mathfrak{r}_{lk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \equiv 0$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots, m),$$
$$f_j(z)\mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + f_k(z)\mathfrak{r}_{lj}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) +$$
$$+ f_l(z)\mathfrak{r}_{jk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \equiv 0$$
$$(j, k, l = 1, 2, \ldots, m).$$

Bestehe jetzt die Zerlegung

$$\psi_{\sigma+1}(z) = \prod_{\mu=1}^{\tau} (z - z^{(\mu)})^{g_\mu},$$

und zwar seien

$$z', z'', \ldots, z^{(\tau)}$$

die sämtlichen *verschiedenen* unter den Zahlen

$$z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma+1}$$

und

$$g_1, g_2, \ldots, g_\tau$$

die Anzahlen ihres Auftretens. Dann muss z.B. bei $z = z^{(\mu)}$ jede der Funktionen

$$\mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

mindestens von der Ordnung g_μ verschwinden. Nach Voraussetzung ist aber mindestens eine der Funktionen

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$$

an dieser Stelle von Null verschieden, etwa die Funktion

$$f_j(z).$$

Also ergibt sich aus den letzten Identitäten, dass alle Funktionen

$$\mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

bei $z = z^{(\mu)}$ von selbst mindestens von der Ordnung g_μ verschwinden, wenn man dies auch nur von den Funktionen

$$\mathfrak{r}_{jk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \quad (k = 1, 2, \ldots, m, k \neq j)$$

verlangt. Dazu müssen aber die Koeffizienten der Polynome

$$\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

offenbar höchstens $(m-1)g_\mu$ unabhängigen homogenen linearen Gleichungen genügen. Berücksichtigt man die sämtlichen Nullstellen von $\psi_{\sigma+1}(z)$, so kommt man demnach auf höchstens $(m-1)\times \times(g_1+g_2+\ldots+g_r) = (m-1)(\sigma+1)$ unabhängige homogene lineare Gleichungen für die $(m-1)(\sigma+1)+1$ Koeffizienten dieser Polynome; ein solches Gleichungssystem ist aber immer lösbar, ohne dass alle Unbekannte verschwinden.

3.) Im Folgenden werden häufig Summen der Gestalt

$$e\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} r_1 r_2 \ldots r_m s \\ \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \ldots \mathfrak{r}_m \mathfrak{s} \end{matrix}\right) = \sum_{k=1}^{m} a_k(z)\mathfrak{a}_k(z)$$

auftreten. Dabei durchlaufe $a_k(z)$ und $\mathfrak{a}_k(z)$ je ein System von m solchen Polynomen, dass zusammen mit den Funktionen

$$r(z) = \sum_{k=1}^{m} a_k(z) f_k(z),$$

$$\mathfrak{r}_{kl}(z) = \mathfrak{a}_l(z) f_k(z) - \mathfrak{a}_k(z) f_l(z) \quad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

die Ungleichungen

$$\boxed{a_k(z)} \leqq r_k - 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\boxed{r(z)} \geqq s - 1,$$

bzw. die Ungleichungen

$$\boxed{\mathfrak{a}_k(z)} \leqq \mathfrak{s} - \mathfrak{r}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\boxed{\mathfrak{r}_{kl}(z)} \geqq \mathfrak{s} + 1 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

bestehen. Also gelten für $j = 1, 2, \ldots, m$ die Identitäten

$$f_j(z)e\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} r_1 r_2 \dots r_m s \\ \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \dots \mathfrak{r}_m \mathfrak{s}\end{matrix}\right) = r(z)\mathfrak{a}_j(z) + \sum_{k=1}^{m} a_k(z)\mathfrak{r}_{jk}(z).$$

Offenbar ist erstens

$$\overline{\left| e\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} r_1 r_2 \dots r_m s \\ \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \dots \mathfrak{r}_m \mathfrak{s}\end{matrix}\right)\right|} \leqq \max_{k=1,2,\dots,m} \left((r_k-1)+(\mathfrak{s}-\mathfrak{r}_k)\right).$$

Ferner sind in den letzten Identitäten die rechten Seiten mindestens von der Ordnung

$$\min(s-1, \mathfrak{s}+1);$$

von mindestens dieser Ordnung müssen demnach auch die linken Seiten

$$f_j(z)e\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} r_1 r_2 \dots r_m s \\ \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \dots \mathfrak{r}_m \mathfrak{s}\end{matrix}\right) \qquad (j = 1, 2, \dots, m)$$

sein. Nach Voraussetzung verschwinden aber die Funktionen

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$$

in keinem der Punkte

$$z_1, z_2, z_3, \dots$$

alle gleichzeitig. Folglich gilt zweitens auch

$$\underline{\left| e\left(z\,\middle|\,\begin{matrix} r_1 r_2 \dots r_m s \\ \mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \dots r_m \mathfrak{s}\end{matrix}\right)\right|} \geqq \min(s-1, \mathfrak{s}+1).$$

Damit ist Grad und Ordnung dieses Polynoms $e(z)$ abgeschätzt.

II.

4.) Im Folgenden sollen nur noch *vollkommene* Funktionssysteme

$$f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \dots, m)$$

betrachtet werden. Diese sind durch folgende zwei Eigenschaften definiert:

a: *In keinem der Punkte*

$$z_1, z_2, z_3, \dots$$

verschwinden alle Funktionen

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_m(z)$$

gleichzeitig.

b: *Für jedes System der m Parameter*

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

soll es unter den Polynomsystemen

$$a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

mindestens eins geben, das den Bedingungen

$$\left\lceil a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right\rceil = \rho_k - 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

genügt.

5.) Aus den Polynomsystemen

$$a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

mit dieser Eigenschaft b werde für die Zukunft zu jedem System natürlicher Zahlen

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

ein für allemal ein *festes*, im Uebrigen beliebiges System herausgegriffen und mit

$$A_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

bezeichnet; ferner sei

$$R(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{k=1}^{m} A_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z).$$

Dann gelten also die Relationen

$$\begin{aligned} \left\lceil A_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right\rceil &= \rho_k - 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \\ \left\lfloor R(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right\rfloor &\geqq \sigma - 1. \end{aligned}$$

Weiter möge der Koeffizient der $(\rho_k - 1)$-ten Potenz von z des Polynoms

$$A_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

für $k = 1, 2, \ldots, m$ mit

$$A_k(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

bezeichnet werden; wegen b verschwindet er nicht.

Es ist zweckmässig, neben dem Parametersystem

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

gleichzeitig die Parametersysteme

$$\rho_1+\delta_{h1},\ \rho_2+\delta_{h2},\ \ldots,\ \rho_m+\delta_{hm} \quad (h=1,2,\ldots,m)$$

zu betrachten; dabei sei wie üblich

$$\delta_{hk}=\begin{cases}1 \text{ für } h=k,\\ 0 \text{ für } h\neq k.\end{cases}$$

Zum Zweck einer Normierung setzen wir

$$A_{hk}(z\,|\,\rho_1\,\rho_2,\ldots,\rho_m)=\frac{A_k(z\,|\,\rho_1+\delta_{h1},\ \rho_2+\delta_{h2},\ \ldots,\ \rho_m+\delta_{hm})}{A_h(\rho_1+\delta_{h1},\ \rho_2+\delta_{h2},\ \ldots,\ \rho_m+\delta_{hm})}$$
$$(h,k=1,2,\ldots,m),$$

$$R_h(z\,|\,\rho_1\,\rho_2,\ldots,\rho_m)=\frac{R(z\,|\,\rho_1+\delta_{h1},\ \rho_2+\delta_{h2},\ \ldots,\ \rho_m+\delta_{hm})}{A_h(\rho_1+\delta_{h1},\ \rho_2+\delta_{h2},\ \ldots,\ \rho_m+\delta_{hm})}$$
$$(h=1,2,\ldots,m),$$

$$A_{hk}(\rho_1\,\rho_2,\ldots,\rho_m)\quad=\frac{A_k(\rho_1+\delta_{h1},\ \rho_2+\delta_{h2},\ \ldots,\ \rho_m+\delta_{hm})}{A_h(\rho_1+\delta_{h1},\ \rho_2+\delta_{h2},\ \ldots,\ \rho_m+\delta_{hm})}$$
$$(h,k=1,2,\ldots,m),$$

so dass also

$$R_h(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)=\sum_{k=1}^{m}A_{hk}(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)f_k(z)\quad(h=1,2,\ldots,m),$$
$$A_{hh}(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)=1\qquad(h=1,2,\ldots,m)$$

ist. Unter $A(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)$ verstehen wir die Matrix

$$A(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)=$$
$$=\begin{pmatrix}A_{11}(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m), & A_{12}(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m), & \ldots, & A_{1m}(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)\\ A_{21}(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m), & A_{22}(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m), & \ldots, & A_{2m}(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{m1}(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m), & A_{m2}(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m), & \ldots, & A_{mm}(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)\end{pmatrix}$$

und unter $D(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)$ deren Determinante

$$D(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)=|A(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)|.$$

6.) *Diese Determinante lässt sich unschwer bestimmen.* Ihr allgemeines Element

$$A_{hk}(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)$$

ist nach Potenzen von z entwickelt gleich

$$A_{hk}(z\,|\,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)=$$
$$=A_{hk}(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)z^{\rho_k+\delta_{hk}-1}\text{ plus niedrigeren Potenzen von } z;$$

es sind demnach die Diagonalelemente jeweils von höherem Grad als die anderen Elemente derselben Spalte; ferner ist nach 5.) ihr höchster Koeffizient gleich Eins. Somit besteht eine Entwicklung

$$D(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = z^\sigma \text{ plus niedrigeren Potenzen von } z.$$

Diese niedrigeren Potenzen lassen sich auch bestimmen, indem man die Ordnung der Determinante abschätzt. Bedeute

$$\Delta_{hk}(z)$$

die Unterdeterminante des Elementes

$$A_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

in der Determinante $D(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$; es ist also

$$\sum_{h=1}^{m} (-1)^{h+l} A_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \Delta_{hl}(z) = \delta_{kl} D(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m).$$

Folglich lassen sich die Gleichungen

$$R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{k=1}^{m} A_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

nach den Funktionen

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$$

auflösen, und man erhält

$$D(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_l(z) = \sum_{h=1}^{m} (-1)^{h+l} \Delta_{hl}(z) R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (l = 1, 2, \ldots, m).$$

Hier besitzen alle Summanden der rechten Seite mindestens die Ordnung σ; von mindestens dieser Ordnung müssen also auch die linken Seiten

$$D(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_l(z) \qquad (l = 1, 2, \ldots, m)$$

sein. Nach Voraussetzung a verschwinden aber die Funktionen

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$$

in keinem der Punkte

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

alle gleichzeitig. Demnach muss die Determinante $D(z \mid \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_m)$ selbst mindestens von der Ordnung σ und somit teilbar durch das

Polynom $\psi_\sigma(z)$ vom Grad σ sein. Da ihr Grad auch nicht grösser und ihr höchster Koeffizient nach oben gleich Eins ist, so folgt also schliesslich die Gleichung

$$D(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \psi_\sigma(z).$$

Die Determinante verschwindet somit nicht identisch und besitzt Nullstellen allein in der vorgegebenen Folge

$$z_1, z_2, z_3, \ldots .$$

7.) Für vollkommene Funktionssysteme kann jetzt der folgende Satz bewiesen werden:

Erster Eindeutigkeitssatz: Sei

$$\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

ein System von m Polynomen, die nicht alle identisch verschwinden und die zusammen mit den Funktionen

$$\mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \mathfrak{a}_l(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z) - \mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_l(z)$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

den Ungleichungen

$$\left\lceil \mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right\rceil \leqq \sigma - \rho_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\left\lfloor \mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right\rfloor \geqq \sigma + 1 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

genügen. Dann gelten folgende drei Behauptungen:

a: *Jedes Polynomsystem mit deselben Eigenschaften wie das System*

$$\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

geht aus diesem durch gliedweise Multiplikation mit derselben nichtverschwindenden Konstanten hervor.

b: *Es bestehen die sämtlichen Gleichungen*

$$\left\lceil \mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right\rceil = \sigma - \rho_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

c: *Mindestens eine der Funktionen*

$$\mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

ist genau von der Ordnung $\sigma+1$.

8.) Der Beweis erfordert mehrere Schritte. Zunächst werde gezeigt, dass Behauptung a aus Behauptung b folgt.

Gibt es nämlich neben dem System

$$\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

noch ein zweites

$$\mathfrak{a}_k^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

das denselben Voraussetzungen genügt, so kann man zwei Konstante α und α^* bestimmen, die nicht beide verschwinden, so dass das Polynom

$$\alpha\mathfrak{a}_1(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \alpha^*\mathfrak{a}_1^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

nur noch höchstens vom Grad $\sigma-\rho_1-1$ ist. Das System der neuen Polynome

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}_k^{**}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) &= \\ &= \alpha\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \alpha^*\mathfrak{a}_k^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ &\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, m)\end{aligned}$$

und der daraus abgeleiteten Funktionen

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}_{kl}^{**}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) &= \\ &= \mathfrak{a}_l^{**}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)f_k(z) - \mathfrak{a}_k^{**}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)f_l(z) \\ &\qquad\qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m)\end{aligned}$$

genügt dann den Ungleichungen

$$\begin{aligned}\overline{\left|\mathfrak{a}_k^{**}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\right|} &\leqq \sigma-\rho_k-\delta_{1k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \\ \underline{\left|\mathfrak{a}_{kl}^{**}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\right|} &\geqq \sigma+1 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m).\end{aligned}$$

Das ist nach Behauptung b nur dann möglich, wenn alle Funktionen des neuen Systems identisch verschwinden, und das sollte gezeigt werden.

9.) Weiter kann man Behauptung b leicht aus den Ergebnissen in 3.) ableiten. Wenn nicht alle Gleichungen

$$\overline{\left|\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\right|} = \sigma-\rho_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

erfüllt sind, so ist etwa

$$\overline{\left|\mathfrak{a}_l(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\right|} \leqq \sigma-\rho_l-1.$$

Als dann ist die h-te der Summen

$$\mathfrak{S}_h(z) = \sum_{k=1}^{m} A_{hk}(z \mid \rho_1+\delta_{l1}, \rho_2+\delta_{l2}, \ldots, \rho_m+\delta_{lm})\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

gleich einem Ausdruck

$$e\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} r_1, r_2, \ldots, r_m s \\ \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_m \mathfrak{s} \end{matrix}\right)$$

mit den Parameterwerten

$$\begin{aligned} s &= \sigma+2, & r_k &= \rho_k+\delta_{hk}+\delta_{kl} & (k &= 1, 2, \ldots, m), \\ \mathfrak{s} &= \sigma \quad, & \mathfrak{r}_k &= \rho_k+\delta_{kl} & (k &= 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}$$

Man hat also

$$\overline{|\mathfrak{E}_h(z)|} \leqq \max_{k=1,2,\ldots,m} \left((\rho_k+\delta_{hk}+\delta_{kl}-1)+(\sigma-\rho_k-\delta_{kl})\right) \leqq \sigma,$$

$$\underline{|\mathfrak{E}_h(z)|} \geqq \min\,(\sigma+1, \sigma+1) = \sigma+1$$

und somit müssen alle Polynome

$$\mathfrak{E}_1(z), \mathfrak{E}_2(z), \ldots, \mathfrak{E}_m(z)$$

identisch verschwinden. Das liefert m homogene lineare Gleichungen mit der nicht identisch verschwindenden Determinante

$$D(z \mid \rho_1+\delta_{l1}, \rho_2+\delta_{l2}, \ldots, \rho_m+\delta_{lm}) = \psi_{\sigma+1}(z)$$

für die Funktionen

$$\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Diese müssen also alle identisch gleich Null sein, und es folgt die Behauptung b.

10.) Die Behauptung c schliesslich ist wieder eine Folge aus Behauptung b. Sind nämlich alle Funktionen

$$\mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

mindestens von der Ordnung $\sigma+2$, so kann man offenbar das Polynomsystem

$$\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

als ein ebensolches System mit den Parametern

$$\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

auffassen. Das liefert sofort einen Widerspruch zu Behauptung b.

11.) Entsprechend wie in 5.) werde jetzt aus den Polynomsystemen

$$\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

die zu den Parametern

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

gehören, ein für allemal ein festes, im Uebrigen beliebiges herausgegriffen und mit

$$\mathfrak{A}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

bezeichnet; alsdann sei weiter

$$\mathfrak{R}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \mathfrak{A}_l(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z) - \mathfrak{A}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_l(z)$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots, m).$$

Es gelten also die Relationen

$$\left\lceil \mathfrak{A}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right\rceil = \sigma - \rho_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\left\lfloor \mathfrak{R}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right\rfloor \geqq \sigma + 1 \qquad (k, l, = 1, 2, \ldots, m).$$

Weiter möge der Koeffizient der $(\sigma - \rho_k)$-ten Potenz von z des Polynoms

$$\mathfrak{A}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

für $k = 1, 2, \ldots, m$ mit

$$\mathfrak{A}_k(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

bezeichnet werden. Es folgt aus dem ersten Eindeutigkeitssatz sogleich, dass die Funktionen

$$\mathfrak{A}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), \; \mathfrak{R}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor eindeutig bestimmt sind und dass alle Zahlen

$$\mathfrak{A}_k(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

nicht verschwinden, dass ferner mindestens eine der Funktionen

$$\mathfrak{R}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \quad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

genau von der Ordnung $\sigma + 1$ ist.

12.) Neben dem Systems mit den Parametern

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

betrachtet man zweckmässigerweise auch die Systeme mit den Parametern

$$\rho_1-\delta_{h1},\ \rho_2-\delta_{h2},\ \ldots,\ \rho_m-\delta_{hm} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m).$$

Zum Zweck einer Normierung werde gesetzt:

$$\mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \frac{\mathfrak{A}_k(z \mid \rho_1-\delta_{h1}, \rho_2-\delta_{h2}, \ldots, \rho_m-\delta_{hm})}{\mathfrak{A}_h(\rho_1-\delta_{h1}, \rho_2-\delta_{h2}, \ldots, \rho_m-\delta_{hm})} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \frac{\mathfrak{R}_{kl}(z \mid \rho_1-\delta_{h1}, \rho_2-\delta_{h2}, \ldots, \rho_m-\delta_{hm})}{\mathfrak{A}_h(\rho_1-\delta_{h1}, \rho_2-\delta_{h2}, \ldots, \rho_m-\delta_{hm})} \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{A}_{hk}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \frac{\mathfrak{A}_k(\rho_1-\delta_{h1}, \rho_2-\delta_{h2}, \ldots, \rho_m-\delta_{hm})}{\mathfrak{A}_h(\rho_1-\delta_{h1}, \rho_2-\delta_{h2}, \ldots, \rho_m-\delta_{hm})} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m),$$

so dass also

$$\mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \\ = \mathfrak{A}_{hl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)f_k(z) - \mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)f_l(z) \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{A}_{hh}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = 1 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

ist. Es sei $\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ die Matrix

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \\ = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \mathfrak{A}_{12}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & \mathfrak{A}_{1m}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ \mathfrak{A}_{21}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \mathfrak{A}_{22}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & \mathfrak{A}_{2m}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{A}_{m1}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \mathfrak{A}_{m2}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & \mathfrak{A}_{mm}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \end{pmatrix}$$

und $\mathfrak{D}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ deren Determinante

$$\mathfrak{D}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = |\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)|.$$

Der erste Eindeutigkeitssatz lehrt, dass die Matrix

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

für jedes System der Parameter

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

vollständig eindeutig bestimmt ist.

13.) *Auch die Determinante* $\mathfrak{D}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ *lässt sich leicht bestimmen.* Es ist

$$f_1(z)^{m-1}\mathfrak{D}(z) = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_{11}(z), & f_1(z)\mathfrak{A}_{12}(z), & \ldots, & f_1(z)\,\mathfrak{A}_{1m}(z) \\ \mathfrak{A}_{21}(z), & f_1(z)\mathfrak{A}_{22}(z), & \ldots, & f_1(z)\,\mathfrak{A}_{2m}(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{A}_{m1}(z), & f_1(z)\mathfrak{A}_{m2}(z), & \ldots, & f_1(z)\,\mathfrak{A}_{mm}(z) \end{vmatrix}.$$

Subtrahiert man hier der Reihe nach von der zweiten, dritten, ..., m-ten Spalte die erste, multipliziert mit $f_2(z), f_3(z), \ldots, f_m(z)$, so kommt man wegen

$$\mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \mathfrak{A}_{hl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z) - \mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_l(z) \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

zu der Formel

$$f_1(z)^{m-1}\mathfrak{D}(z) = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_{11}(z), & \mathfrak{R}_{112}(z), & \ldots, & \mathfrak{R}_{11m}(z) \\ \mathfrak{A}_{21}(z), & \mathfrak{R}_{212}(z), & \ldots, & \mathfrak{R}_{21m}(z) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{A}_{m1}(z), & \mathfrak{R}_{m12}(z), & \ldots, & \mathfrak{R}_{m1m}(z) \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante sind alle Elemente ausser denen der ersten Spalte mindestens von der Ordnung σ. Also muss

$$\frac{f_1(z)^{m-1}\mathfrak{D}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{\psi_\sigma(z)^{m-1}}$$

eine reguläre Funktion in G sein. Ebenso zeigt man, dass auch die Funktionen

$$\frac{f_h(z)^{m-1}\mathfrak{D}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{\psi_\sigma(z)^{m-1}} \qquad (h = 2, 3, \ldots, m)$$

in G regulär sind. Nach Voraussetzung sind aber die Funktionen

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$$

in keinem der Punkte

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

alle gleichzeitig Null. Also muss die Determinante $\mathfrak{D}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ durch

$$\psi_\sigma(z)^{m-1}$$

teilbar sein, d.h. durch ein Polynom genau vom Grad $(m-1)\sigma$.

Andrerseits ist das allgemeine Glied

$$\mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

der Determinante $\mathfrak{D}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ nach Potenzen von z entwickelt gleich $\mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \mathfrak{A}_{hk}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) z^{\sigma-\rho_k+\delta_{hk}-1}$ plus niedrigeren Potenzen von z; es sind demnach die Diagonalelemente jeweils von höherem Grad als die anderen Elemente derselben Spalte; ferner ist nach 12.) ihr höchster Koeffizient gleich Eins. Nach Potenzen von z entwickelt ist also die Determinante $\mathfrak{D}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ gleich

$$\mathfrak{D}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = z^{(m-1)\sigma} \text{ plus niedrigeren Potenzen von } z.$$

Diese niedrigeren Potenzen ergeben sich direkt aus der Teilbarkeit der Determinante durch das Polynom $\psi_\sigma(z)^{m-1}$ gleichen Grades; man bekommt

$$\mathfrak{D}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \psi_\sigma(z)^{m-1}.$$

Die Determinante verschwindet somit nicht identisch und hat Nullstellen allein in der vorgegebenen Folge

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

14.) Es ist jetzt möglich, für vollkommene Funktionssysteme eine weitere allgemeine Eigenschaft zu beweisen:

Zweiter Eindeutigkeitssatz: Sei

$$a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

ein System von m Polynomen, die nicht alle identisch verschwinden und die zusammen mit der Funktion

$$r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{k=1}^{m} a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z)$$

den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \boxed{a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)} &\leqq \rho_k - 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \\ \boxed{r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)} &\geqq \sigma - 1 \end{aligned}$$

genugen. Dann stimmen folgende drei Behauptungen:

a: *Jedes Polynomsystem mit denselben Eigenschaften wie das System*

$$a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

geht aus diesem dvrch gliedweise Multiplikation mit derselben nichtverschwindenden Konstanten hervor.

b: *Es bestehen die Gleichungen*

$$\left|\boxed{a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| = \rho_k - 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

c: *Die Funktion*

$$r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

ist genau von der Ordnung $\sigma - 1$.

15.) Der Beweis erfordert mehrere Schritte. Zunächst werde gezeigt, dass Behauptung a aus Behauptung b folgt.

Gibt es nämlich neben dem System

$$a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

noch ein zweites

$$a_k^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

das denselben Voraussetzungen genügt, so kann man zwei Konstante β und β^* bestimmen, die nicht beide verschwinden, so dass das Polynom

$$\beta a_1(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \beta^* a_1^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

nur noch höchstens vom Grad $\rho_1 - 2$ ist. Das System der neuen Polynome

$$a_k^{**}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \beta a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \beta^* a_k^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

und der daraus abgeleiteten Funktion

$$r^{**}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{k=1}^{m} a_k^{**}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z)$$

genügt dann den Ungleichungen

$$\left|\boxed{a_k^{**}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| \leqq \rho_k - \delta_{1k} - 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\left|\underline{r^{**}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| \geqq \sigma - 1.$$

Das ist nach Behauptung b nur dann möglich, wenn alle Funktionen des neuen Systems identisch verschwinden, und das sollte gezeigt werden.

16.) Weiter kann man Behauptung b leicht aus den Ergebnissen in 3.) ableiten. Wenn nicht alle Gleichungen

$$\left|\overline{a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| = \rho_k - 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

erfüllt sind, so ist etwa

$$\left|\overline{a_l(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| \leqq \rho_l - 2.$$

Alsdann ist die h-te der Summen

$$E_h(z) = \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1 - \delta_{l1}, \rho_2 - \delta_{l2}, \ldots, \rho_m - \delta_{lm}) a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m),$$

gleich einem Ausdruck

$$e\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} r_1, r_2, \ldots, r_m s \\ \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_m \mathfrak{s} \end{matrix}\right)$$

mit den Parametern

$$s = \sigma, \qquad r_k = \rho_k - \delta_{kl} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\mathfrak{s} = \sigma - 2, \qquad \mathfrak{r}_k = \rho_k - \delta_{hk} - \delta_{kl} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Man hat also

$$\left|\overline{E_h(z)}\right| \leqq \max_{k=1, 2, \ldots, m} \left((\rho_k - \delta_{kl} - 1) + (\sigma - 2 - \rho_k + \delta_{hk} + \delta_{kl})\right) \leqq \sigma - 2,$$
$$\left|\underline{E_h(z)}\right| \geqq \min\,(\sigma - 1, \sigma - 1) = \sigma - 1,$$

und somit müssen alle Polynome

$$E_1(z), E_2(z), \ldots, E_m(z)$$

identisch verschwinden. Das liefert m homogene lineare Gleichungen mit der nicht identisch verschwindenden Determinante

$$\mathfrak{D}(z \mid \rho_1 - \delta_{l1}, \rho_2 - \delta_{l2}, \ldots, \rho_m - \delta_{lm}) = \psi_{\sigma-1}(z)^{m-1}$$

für die Funktionen

$$a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Diese müssen also alle identisch gleich Null sein, und es folgt die Behauptung b.

17.) Die Behauptung c schliesslich ist wieder eine Folge aus Behauptung b. Ist nämlich die Funktion

$$r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

mindestens von der Ordnung σ, so kann man offenbar das Polynomsystem

$$a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

als ein ebensolches System mit den Parametern

$$\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

auffassen. Das liefert sofort einen Widerspruch zu Behauptung b.

18.) Der zweite Eindeutigkeitssatz zeigt, dass für jedes System der Parameter

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

die Funktionen

$$A_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), \ R(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor bestimmt sind und dass die Matrix

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

sogar vollständig eindeutig festgelegt ist. Die beiden Matrizen

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

samt den Funktionen

$$R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h, k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

sind also schon festgelegt mit der Angabe des vollkommenen Funktionssystems

$$f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Unser Ziel im Folgenden wird sein, die formalen Eigenschaften dieser Matrizen eingehend zu studieren.

Schon jetzt sei als triviale Folge aus der Behauptung c des zweiten Eindeutigkeitssatzes erwähnt, dass die Funktionen

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$$

eines vollkommenen System offenbar linear unabhängig in bezug auf den Körper der rationalen Funktionen von z sein müssen.

III.

19.) Die Definition des vollkommenen Systems, die an die Spitze des letzten Kapitels gestellt wurde, lässt sich durch andere Definitionen ersetzen, die manchmal schneller zur Entscheidung führen, ob ein Funktionssystem vollkommen ist.

Zu einer neuen Definition kommt man sofort, wenn man von den Eigenschaften der Polynome

$$\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Gebrauch macht. Es gilt nämlich:

1. *Kriterium: Ein System von in G regulären Funktionen*

$$f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

ist dann und nur dann vollkommen, wenn es folgende zwei Eigenschaften hat:

a: *In keinem der Punkte*

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

verschwinden alle Funktionen

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$$

gleichzeitig.

b: *Für jedes System der Parameter*

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

gibt es unter den Polynomsystemen

$$\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

mindestens eins, das den Gleichungen

$$\left|\overline{\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| = \sigma - \rho_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

genügt.

Beweis: Ist dieses Kriterium erfüllt, so lässt sich ein Polynomsystem

$$\mathfrak{A}_k(z \mid \rho_1 \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

mit

$$\left|\overline{\mathfrak{A}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| = \sigma - \rho_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

und eine normierte Matrix

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

entsprechend wie in 12.) und 13.) zu jedem Parametersystem

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

angeben. Alsdann kann man die Determinante

$$\mathfrak{D}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

wie in 13.) berechnen und zeigen, dass dieselbe nicht identisch verschwindet. Das erlaubt weiter, den zweiten Eindeutigkeitssatz wie in den früheren Paragraphen herzuleiten; also genügt das Funktionssystem

$$f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

der alten Definition des vollkommenen Systems in 4.).

20.) Weitere Definitionen erhält man, wenn man von Eigenschaften der Restfunktionen

$$r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

Gebrauch macht.

2. *Kriterium: Ein System von in G regulären Funktionen*

$$f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

ist dann und nur dann vollkommen, wenn es kein System von m Polynomen

$$a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

die nicht alle identisch verschwinden, gibt, das zusammen mit der Funktion

$$r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{k=1}^{m} a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z)$$

den Beziehungen

$$\boxed{\begin{array}{l} \left| a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right| \leqq \rho_k - 1 \\ \left| r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right| > \sigma - 1 \end{array}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

genügt.

Beweis: Genügt das System von m Funktionen

$$f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

den Voraussetzungen dieses Kriteriums, so muss offenbar jedes System von m Polynomen

$$a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

die nicht alle identisch Null sind und zusammen mit der Funktion

$$r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{k=1}^{m} a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z)$$

den Ungleichungen

$$\left|\overline{a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| \leqq \rho_k - 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\left|\underline{r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| \geqq \sigma - 1$$

genügen, auch die Gleichungen

$$\left|\overline{a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| = \rho_k - 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$
$$\left|\underline{r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| = \sigma - 1$$

befriedigen. Denn die Ordnung von $r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ kann nicht grösser als $\sigma - 1$ sein, wie unmittelbar aus dem Kriterium folgt. Andrerseits kann aber auch der Grad keines der Polynome $a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ kleiner als $\rho_k - 1$ sein. Denn wäre etwa

$$\left|\overline{a_l(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| \leqq \rho_l - 2,$$

so liesse sich das Polynomsystem auffassen als zugehörig zu den Parameterwerten

$$\rho_1 - \delta_{l1}, \rho_2 - \delta_{l2}, \ldots, \rho_m - \delta_{lm}$$

und man käme wieder zu einem Widerspruch gegen das Kriterium, denn jetzt wäre die Ordnung von $r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$ abermals zu gross, nämlich grösser als

$$\sum_{k=1}^{m} (\rho_k - \delta_{kl}) - 1 = \sigma - 2.$$

Berücksichtigt man noch den Existenzsatz in 2.), so folgt also endlich, dass es zu jedem System der Parameter

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

ein System von m Polynomen

$$a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

gibt, die zusammen mit der abgeleiteten Funktion

$$r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{k=1}^{m} a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z)$$

den Gleichungen

$$\left|\overline{a_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| = \rho_k - 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$
$$\left|\underline{r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| = \sigma - 1$$

genügen. Speziell müssen also die Funktionen

$$r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

jeder Ordnung fähig sein, wenn man nur für die Parameter geeignete Zahlen einsetzt. Das besagt aber, dass die Funktionen

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$$

an keiner der Stellen

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

alle gleichzeitig verschwinden können. Denn sonst hätte auch jede Funktion

$$r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

an dieser Stelle eine Nullstelle. Tritt nun diese Stelle in der Folge

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

zum erstenmal als das Glied z_λ mit dem Index λ auf, so könnte infolgedessen keine Funktion

$$r(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

genau von der Ordnung

$$\lambda - 1$$

sein, gegen die vorige Bemerkung.

Ein Funktionssystem

$$f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

das dem zweiten Kriterium genügt, befriedigt also auch alle Forderungen, die in 4.) an ein vollkommenes System gestellt wurden; also ist die Behauptung bewiesen.

21.) Indem man die Schlüsse des letzten Paragraphen in ganz entsprechender Weise bei den Funktionen

$$\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

wiederholt und von dem 1. Kriterium Gebrauch macht, zeigt man:

3. *Kriterium: Ein System von in G regulären Funktionen*

$$f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

ist dann und nur dann vollkommen, wenn es kein System von m Polynomen

$$\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

die nicht alle identisch verschwinden, gibt, das mit den Funktionen

$$\mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$= \mathfrak{a}_l(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z) - \mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_l(z)$$
$$(k, l = 1. 2, \ldots, m)$$

zusammen den Beziehungen

$$\boxed{\mathfrak{a}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)} \leqq \sigma - \rho_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\boxed{\mathfrak{r}_{kl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)} > \sigma - 1 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

genügt.

22.) Von den letzten Kriterien kann man z.B. leicht den folgenden Satz ableiten.

"*Ist* $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots$, *und bilden die Funktionen*

$$f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

ein vollkommenes System bezüglich dieser Punkte, so sind für alle Werte der Parameter $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ *sowohl die Polynome*

$$A_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

als auch die Polynome

$$\mathfrak{A}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

teilerfremd."

Denn hätten etwa die Polynome

$$A_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

den gemeinsamen Teiler $P(z)$, wo $P(z)$ ein Polynom vom Grad $p \geqq 1$ ist, so genügten die Polynome

$$A_k^*(z) = \frac{A_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{P(z)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

zusammen mit den Funktionen

$$R^*(z) = \frac{R(z \mid \rho_1, \rho_2 \ldots, \rho_m)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{m} A_k^*(z) f_k(z)$$

den Beziehungen

$$\boxed{A_k^*(z)} = \rho_k - p - 1,$$
$$\boxed{R^*(z)} \geqq \sigma - p - 1.$$

Dies steht jedoch wegen $m \geqq 2$ und

$$\sum_{k=1}^{m} (\rho_k - p) = \sigma - mp < \sigma - p$$

im Widerspruch zum 2. Kriterium.

In derselben Weise schliesst man bei den Polynomen

$$\mathfrak{A}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

und erhält einen Widerspruch, indem man von dem 3. Kriterium Gebrauch macht.

Dieser Satz braucht nicht mehr zu gelten, wenn die Punkte $z_1, z_2, z_3, \ldots$ *nicht alle zusammenfallen.*

IV.

23.) Sowohl die Funktionen

$$A_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),\ R(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

als auch die Funktionen

$$\mathfrak{A}_k(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),\ \mathfrak{R}_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

die zu einem vollkommenen Funktionssystem

$$f_k(z) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

gehören, genügen einer grossen Anzahl von Relationen. Einige von diesen Identitäten sollen hier abgeleitet werden und zwar zunächst diejenigen, die die Funktionen mit h-Index mit denen ohne h-Index verknüpfen.

24.) Es bestehen die Gleichungen

$$(z-z_\sigma)A_k(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{h=1}^{m} A_h(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) A_{hk}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$(z-z_\sigma)R(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{h=1}^{m} A_h(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) R_h(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

$$\mathfrak{A}_k(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{h=1}^{m} \mathfrak{A}_h(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \mathfrak{A}_{hk}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{R}_{kl}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{h=1}^{m} \mathfrak{A}_h(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \mathfrak{R}_{hkl}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m).$$

Denn werde der Reihe nach die Differenz der linken Seite minus der rechten Seite in diesen Formeln mit

$$A_k^*(z),\ R^*(z),\ \mathfrak{A}_k^*(z),\ \mathfrak{R}_{kl}^*(z)$$

bezeichnet, so dass also

$$R^*(z) = \sum_{k=1}^{m} A_k^*(z) f_k(z),\quad \mathfrak{R}_{kl}^*(z) = \mathfrak{A}_l^*(z) f_k(z) - \mathfrak{A}_k^*(z) f_l(z)$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

ist. Dann bestehen offenbar die Ungleichungen

$$\begin{aligned} &\boxed{A_k^*(z)} \leqq \rho_k - 1 && (k = 1, 2, \ldots, m), \\ &\underline{\left|R^*(z)\right|} \geqq \sigma, && \\ &\boxed{\mathfrak{A}_k^*(z)} \leqq \sigma - \rho_k - 1 && (k = 1, 2, \ldots, m). \\ &\underline{\left|\mathfrak{R}_{kl}^*(z)\right|} \geqq \sigma && (k, l = 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}$$

Das kann aber nach Kriterium 2 und 3 nur dann gelten, wenn alle Ausdrücke

$$A_k^*(z),\ R^*(z),\ \mathfrak{A}_k^*(z),\ \mathfrak{R}_{kl}^*(z)$$

gleichzeitig identisch verschwinden, und das sollte gezeigt werden.

25.) Die Ergebnisse in 3.) führen zu einer sehr einfachen Formel für den Ausdruck

$$l_{gh}(z) = \sum_{k=1}^{m} A_{gk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m).$$

Offenbar ist derselbe gleich einer Summe

$$e\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} r_1, r_2, \ldots, r_m s \\ \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_m \mathfrak{s} \end{matrix}\right)$$

und zwar mit den Parameterwerten

$$\begin{aligned} s &= \sigma + 1, & r_k &= \rho_k + \delta_{kg} & (k &= 1, 2, \ldots, m), \\ \mathfrak{s} &= \sigma - 1, & \mathfrak{r}_k &= \rho_k - \delta_{hk} & (k &= 1, 2, \ldots, m). \end{aligned}$$

Es gilt somit

$$\begin{aligned} \boxed{e_{gh}(z)} &\leqq \max_{k=1, 2, \ldots, m} \left((\rho_k + \delta_{gk} - 1) + (\sigma - \rho_k + \delta_{hk} - 1)\right) = \\ &= \max_{k=1, 2, \ldots, m} (\sigma + \delta_{gk} + \delta_{hk} - 2), \\ \underline{\left|e_{gh}(z)\right|} &\geqq \min(\sigma, \sigma) = \sigma. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort für $g \neq h$

$$\lceil e_{gh}(z) \rceil < \lfloor e_{gh}(z) \rfloor, \qquad \text{d.h.} \quad e_{gh}(z) \equiv 0,$$

hingegen für $g = h$

$$\sigma \geqq \lceil e_{gh}(z) \rceil \leqq \lfloor e_{gh}(z) \rfloor \geqq \sigma, \quad \text{d.h.} \quad e_{gh}(z) = c\psi_\sigma(z)$$

mit einem konstanten Faktor c. Dieser Faktor muss gleich Eins sein, denn aus der Definition von $e_{gg}(z)$ folgt, dass dieses Polynom eine Potenzreihe $e_{gg}(z) = z^\sigma$ plus niedrigere Potenzen von z besitzt.

Also gelten die m^2 Identitäten

$$\sum_{k=1}^{m} A_{gk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \delta_{gh}\psi_\sigma(z) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, m).$$

Bezeichnet wie üblich ein Akzent die transponierte Matrix und ist E die Einheitsmatrix, so lassen sich die letzten Formeln zusammenfassen in die Matrizengleichung

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\mathfrak{A}'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \\ = \mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)A'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \psi_\sigma(z)E.$$

Nun steht rechts bis auf einen skalaren Faktor die Einheitsmatrix; die Faktoren der linken Seiten müssen also vertauschbar sein, und es gelten auch die Matrizengleichungen

$$A'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \\ = \mathfrak{A}'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \psi_\sigma(z)E$$

oder ausgeschrieben

$$\sum_{k=1}^{m} A_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\mathfrak{A}_{hl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \delta_{kl}\psi_\sigma(z) \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m).$$

Die so bewiesenen Formeln bringen zum Ausdruck, dass das Polynom

$$(-1)^{h+k}\mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

die Unterdeterminante des Elementes

$$A_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

in der Determinante

$$D(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

ist; dadurch wird die frühere Berechnung dieser Determinante verständlich.

26.) Nach den Formeln in 25.) sind die beiden Matrizen

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \frac{1}{\psi_\sigma(z)} \mathfrak{A}'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

wie auch die beiden Matrizen

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \frac{1}{\psi_\sigma(z)} A'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

zu einander reziprok. Daraus lässt sich eine sehr allgemeine Relation ableiten, die gleichartige Matrizen mit verschiedenen Parametern verknüpft.

Seien

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \text{ und } \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'$$

je m natürliche Zahlen mit den Summen

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m} \rho_k \text{ und } \sigma' = \sum_{k=1}^{m} \rho_k'$$

und zwar möge

$$\sigma' \geqq \sigma$$

sein. Alsdann werde gesetzt:

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = A(z|\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')A(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{\psi_\sigma(z)} A(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')\mathfrak{A}'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

$$\mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) = \mathfrak{A}(z|\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')\mathfrak{A}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{\psi_\sigma(z)} \mathfrak{A}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')A'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

so dass

$$A(z|\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') = P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) A(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

$$\mathfrak{A}(z|\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') = \mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) \mathfrak{A}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

ist. Die Elemente

$$P_{gh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \text{ und } \mathfrak{P}_{gh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right)$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, m)$$

dieser beiden Matrizen sind durch die Gleichungen

$$P_{gh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = \frac{1}{\psi_\sigma(z)} \sum_{k=1}^{m} A_{gk}(z|\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')\, \mathfrak{A}_{hk}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{P}_{gh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) = \frac{1}{\psi_\sigma'(z)} \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{A}_{gk}(z|\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')\, A_{hk}(z|\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, m)$$

festgelegt; sie sind also rationale Funktionen mit dem Nenner $\psi_\sigma(z)$.

Nach 3.) ist nun jeder der Ausdrücke

$$\psi_\sigma(z) P_{gh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \text{ und } \psi_\sigma(z)\mathfrak{P}_{gh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right)$$

gleich einer Summe

$$e\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} r_1, r_2, \ldots, r_m s \\ \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_m \mathfrak{s} \end{matrix}\right),$$

und zwar sind die Parameter im ersten Fall gleich

$$s = \sigma'+1, \quad r_k = \rho_k'+\delta_{gk} \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\mathfrak{s} = \sigma-1, \quad \mathfrak{r}_k = \rho_k-\delta_{hk} \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

im zweiten gleich

$$s = \sigma+1, \quad r_k = \rho_k+\delta_{hk} \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\mathfrak{s} = \sigma'-1, \quad \mathfrak{r}_k = \rho_k'-\delta_{gk} \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

so dass man erhält:

$$\overline{\left|\psi_\sigma(z) P_{gh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right)\right|} \leqq \max_{k=1,2,\ldots,m} \left((\rho_k'+\delta_{gk}-1)+(\sigma-\rho_k+\delta_{hk}-1)\right) = \max_{k=1,2,\ldots,m} (\sigma+\rho_k'-\rho_k+\delta_{gk}+\delta_{hk}-2),$$

$$\underline{\left|\psi_\sigma(z) P_{gh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right)\right|} \geqq \min(\sigma', \sigma) = \sigma,$$

und

$$\left|\psi_\sigma(z)\mathfrak{P}_{gh}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'\end{matrix}\right)\right| \leqq$$
$$\leqq \max_{k=1,2,\ldots,m} \left((\rho_k+\delta_{hk}-1)+(\sigma'-\rho_k'+\delta_{gk}-2)\right) =$$
$$= \max_{k=1,2,\ldots,m} (\sigma'+\rho_k-\rho_k'+\delta_{gk}+\delta_{hk}-2),$$
$$\left|\psi_\sigma(z)\mathfrak{P}_{gh}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'\end{matrix}\right)\right| \geqq \min(\sigma_1, \sigma') = \sigma.$$

Aus den unteren Schranken für die Ordnung der Polynome

$$\psi_\sigma(z)P_{gh}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'\\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\end{matrix}\right) \text{ und } \psi_\sigma(z)\mathfrak{P}_{gh}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'\end{matrix}\right)$$

folgt sogleich, dass dieselben ohne Rest durch $\psi_\sigma(z)$ teilbar sind; die Ausdrücke

$$P_{gh}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'\\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\end{matrix}\right) \text{ und } \mathfrak{P}_{gh}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'\end{matrix}\right)$$

sind demnach nicht nur rationale Funktionen, sondern sogar ganze rationale Funktionen von z. Für ihre Gradzahlen gelten die Ungleichungen

$$\left|P_{gh}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'\\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\end{matrix}\right)\right| \leqq \max_{k=1,2,\ldots,m} (\rho_k'-\rho_k+\delta_{gk}+\delta_{hk}-2)$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\left|\mathfrak{P}_{gh}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'\end{matrix}\right)\right| \leqq \sigma'-\sigma + \max_{k=1,2,\ldots,m} (\rho_k-\rho_k'+\delta_{gk}+\delta_{hk}-2)$$
$$(g, h = 1, 2, \ldots, m),$$

and zwar verschwinden diese Polynome jedesmal identisch, wenn die obere Schranke für ihren Grad negativ ist.

Aus den früher berechneten Determinanten der Matrizen

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

lassen sich auch die Determinanten der beiden Matrizen

$$P\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'\\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\end{matrix}\right) \text{ und } \mathfrak{P}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'\end{matrix}\right)$$

ableiten; man erhält

$$\left| P\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \right| = \frac{\psi_{\sigma'}(z)}{\psi_\sigma(z)},$$

$$\left| \mathfrak{P}\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) \right| = \left(\frac{\psi_{\sigma'}(z)}{\psi_\sigma(z)}\right)^{m-1}.$$

Ferner liefert die Reziprozitätsbeziehung zwischen den Matrizen

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

leicht folgende Matrizengleichungen

$$P\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \mathfrak{P}'\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) =$$

$$= \mathfrak{P}\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) P'\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = \frac{\psi_{\sigma'}(z)}{\psi_\sigma(z)} E,$$

$$P'\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \mathfrak{P}\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) =$$

$$= \mathfrak{P}'\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) P\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = \frac{\psi_{\sigma'}(z)}{\psi_\sigma(z)} E.$$

27.) Von den Ergebnissen in 26.) sind hauptsächlich einige Sonderfälle von Interesse. Bevor wir diese angeben, ist es jedoch zweckmässig, noch gewisse neue Bezeichnungen einzuführen.

Nach Definition besitzen die Polynome

$$A_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

als höchsten Koeffizienten die Zahlen

$$A_{hk}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{A}_{hk}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

die alle nicht verschwinden und für $h = k$ gleich Eins sind. Statt dieser Zahlen werde jetzt das vollständige Koeffizientensystem eingeführt durch die Definitionsgleichungen

$$A_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = z^{\rho_k} \sum_{\kappa=0}^{\infty} A_{hk}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) z^{-\kappa} \quad (h, k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = z^{\sigma-\rho_k} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \mathfrak{A}_{hk}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) z^{-\kappa} \quad (h, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Aus ihnen bilden wir die Matrizen

$$A^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & A_{12}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & A_{1m}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ A_{21}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & A_{22}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & A_{2m}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & A_{m2}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & A_{mm}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \end{pmatrix}$$

$$(\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$\mathfrak{A}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \mathfrak{A}_{12}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & \mathfrak{A}_{1m}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ \mathfrak{A}_{21}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \mathfrak{A}_{22}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & \mathfrak{A}_{2m}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{A}_{m1}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \mathfrak{A}_{2m}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & \mathfrak{A}_{mm}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \end{pmatrix}$$

$$(\kappa = 0, 1, 2, \ldots),$$

von denen natürlich nur diejenigen mit hinreichend kleinem κ nicht gleich der Nullmatrix sind; für $\kappa = 0$ stimmen beide gerade mit der Einheitsmatrix überein.

Führt man noch die beiden Diagonalmatrizen

$$Z(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \begin{pmatrix} z^{\rho_1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & z^{\rho_2}, & \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & 0, & \ldots, & z^{\rho_m} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{Z}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \begin{pmatrix} z^{\sigma-\rho_1}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & z^{\sigma-\rho_2}, & \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & 0, & \ldots, & z^{\sigma-\rho_m} \end{pmatrix}$$

ein, so wird jetzt gerade

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$

$$= \left(E + \frac{A^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{z} + \frac{A^{(2)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{A^{(3)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{z^3} + \ldots \right) Z(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \left(E + \frac{\mathfrak{A}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{z} + \frac{\mathfrak{A}^{(2)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{z^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathfrak{A}^{(3)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{z^3} + \ldots\right) \mathfrak{Z}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

28.) Die zu den beiden Matrizen

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

reziproken Matrizen

$$\frac{1}{\psi_\sigma(z)} \mathfrak{A}'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \frac{1}{\psi_\sigma(z)} A'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

lassen sich gleichfalls nach fallenden Potenzen von z entwicklen. Es gibt eine Reihe nach fallenden Potenzen von z:

$$\frac{z^\sigma}{\psi_\sigma(z)} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{c_\sigma^{(\kappa)}}{z^\kappa},$$

deren erste Koeffizienten die Werte

$$c_\sigma^{(0)} = 1,\ c_\sigma^{(1)} = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} z_\lambda,\ c_\sigma^{(2)} = \sum_{\lambda=1}^{\sigma} z_\lambda^2 + \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2=1 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2}}^{\sigma}\sum z_{\lambda_1} z_{\lambda_2}, \ldots$$

haben. Bildet man mit ihrer Hilfe die konstanten Matrizen

$$\tilde{A}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{\lambda=0}^{\kappa} c_\sigma^{(\kappa-\lambda)} A^{(\lambda)\prime}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\tilde{\mathfrak{A}}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{\lambda=0}^{\kappa} c_\sigma^{(\kappa-\lambda)} \mathfrak{A}^{(\lambda)\prime}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots,),$$

so wird gerade

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1} = \frac{1}{\psi_\sigma(z)} \mathfrak{A}'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= Z(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\tilde{\mathfrak{A}}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{z^\kappa},$$

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1} = \frac{1}{\psi_\sigma(z)} A'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \mathfrak{Z}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1} \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{z^\kappa},$$

Diese neuen Matrizen

$$\tilde{A}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \tilde{\mathfrak{A}}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

sind für $\kappa = 0$ wieder gleich der Einheitsmatrix; sie sind sowohl untereinander, als auch mit den Matrizen

$$A^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{A}^{(\kappa)}(\rho_1, \rho_1, \rho_m) \qquad (\kappa = 0, 1, 2, \ldots)$$

durch eine grosse Anzahl von Relationen verknüpft. Die einfachste hiervon lautet:

$$A^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \\ = \mathfrak{A}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \tilde{A}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = 0,$$

$$A^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \mathfrak{A}^{(1)\prime}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = -c_\sigma^{(1)} E.$$

29.) Es bleibt noch übrig, auch für die beiden Matrizen

$$A(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') \text{ und } \mathfrak{A}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')$$

eine Entwicklung nach Potenzen von z aufzustellen.

Offenbar sind die Elemente der beiden Matrizen

$$A(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') Z(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1}$$

und

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') \mathfrak{Z}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1}$$

rationale Funktionen von z und zwar mit einem Nenner, der eine reine Potenz von z ist. Es gibt demnach zwei doppelt unendliche Folgen von konstanten Matrizen

$$A^{(\kappa)}\begin{pmatrix}\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{A}^{(\kappa)}\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'\end{pmatrix}$$
$$(\kappa = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots),$$

so dass die Entwicklungen

$$A(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') Z(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1} = \\ = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} A^{(\kappa)}\begin{pmatrix}\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\end{pmatrix} z^{-\kappa},$$

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') \mathfrak{Z}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1} = \\ = \sum_{\kappa=-\infty}^{+\infty} \mathfrak{A}^{(\kappa)}\begin{pmatrix}\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'\end{pmatrix} z^{-\kappa}$$

bestehen. Diese beiden Reihen sind nur scheinbar über unendlichviele Summationsindizes erstreckt; denn es sind jeweils nur unter ihren Summanden endlichviele von Null verschieden.

30.) Für die beiden Matrizen

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right)$$

kommt man jetzt sehr leicht zu expliziten Ausdrücken. Dazu braucht man in den Formeln

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = A(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1},$$

$$\mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) = \mathfrak{A}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1},$$

rechts für die Faktoren nur ihre Potenzreihen einzusetzen und alsdann auszumultiplizieren. Da die Elemente der beiden Matrizen lauter Polynome sind, ist es hierbei nur nötig, in den Ausdrücken, die nach der Ausmultiplikation entstehen, allein die nicht-negativen Potenzen von z zu berücksichtigen.

Auf diese Weise kommt man zu folgenden Formeln:

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) =$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{\infty} z^{\kappa} \sum_{\lambda=0}^{\infty} A^{(-\kappa-\lambda)}\begin{pmatrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} \bar{\mathfrak{A}}^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

$$\mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) =$$

$$= \sum_{\kappa=0}^{\infty} z^{\kappa} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \mathfrak{A}^{(-\kappa-\lambda)}\begin{pmatrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{pmatrix} \bar{A}^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m).$$

Auch diese Summen sind nur scheinbar über unendlichviele Glieder erstreckt, denn höchstens endlichviele Summanden sind von Null verschieden.

31.) Nunmehr kann dazu übergegangen werden, einige Einzelfälle zu untersuchen, die besonders wichtig sind.

Erstens sei

$$\rho_1' = \rho_1 + 1, \ \rho_2' = \rho_2 + 1, \ldots, \rho_m' = \rho_m + 1.$$

Dann ist offenbar gerade

$$A^{(\kappa)}\begin{pmatrix}\rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\end{pmatrix} =$$
$$= A^{(\kappa+1)}(\rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1) \qquad (\kappa = -1, 0, 1, \ldots),$$
$$\mathfrak{A}^{(\kappa)}\begin{pmatrix}\rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1\end{pmatrix} =$$
$$= \mathfrak{A}^{(\kappa+m-1)}(\rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1) \quad (\kappa = 1-m, 2-m, \ldots),$$

denn es gelten die beiden Gleichungen

$$Z(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1) = z\, Z(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$
$$\mathfrak{Z}(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1) = z^{m-1}\mathfrak{Z}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m).$$

Die gesuchten Uebergangsmatrizen sind somit bestimmt durch die Formeln:

$$P\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\end{matrix}\right) =$$
$$= \sum_{\kappa=0}^{1} z^{1-\kappa} \sum_{\lambda=0}^{\kappa} A^{(\kappa-\lambda)}(\rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1)\tilde{\mathfrak{A}}^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$
$$\mathfrak{P}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1\end{matrix}\right) =$$
$$= \sum_{\kappa=0}^{m-1} z^{m-1-\kappa} \sum_{\lambda=0}^{\kappa} \mathfrak{A}^{(\kappa-\lambda)}(\rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1)\tilde{A}^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m).$$

In beiden Fällen ist hiernach der Matrix-Koeffizient der höchsten auftretenden Potenz von z, d.h. bei der ersten Matrix der von z^1, bei der zweiten Matrix der von z^{m-1}, gleich der Einheitsmatrix. Auch der nächstfolgende Koeffizient lässt sich auf eine einfache Gestalt bringen. Dazu ist es zweckmässig, mittels der drei Gleichungen

$$\tilde{A}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = A^{(1)\prime}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + c_\sigma^{(1)}E,$$
$$\tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = -A^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$
$$\mathfrak{A}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1) =$$
$$= -A^{(1)\prime}(\rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1) - c_{\sigma+m}^{(1)}E$$

alle auftretende Koeffizienten-Matrizen durch die beiden speziellen

$$A^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } A^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1)$$

auszudrücken.

Dann nehmen die obigen Formeln folgende Gestalt an:

$$P\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\end{matrix}\right)=$$
$$= Ez+(A^{(1)}(\rho_1+1,\,\rho_2+1,\,\ldots,\,\rho_m+1)-A^{(1)}(\rho_1,\,\rho_2,\,\ldots,\,\rho_m)),$$

$$\mathfrak{P}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1\end{matrix}\right)=$$
$$= Ez^{m-1}-(A^{(1)\prime}(\rho_1+1,\rho_2+1,\ldots,\rho_m+1)-A^{(1)\prime}(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m)+$$
$$+\ (c^{(1)}_{\sigma+m}-c^{(1)}_{\sigma})E)z^{m-2} \text{ plus niedrigere Potenzen von } z.$$

Die Matrix

$$P\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\end{matrix}\right)$$

ist hiernach bereits eindeutig bestimmt, wenn man die beiden Koeffizientenmatrizen

$$A^{(1)}(\rho_1+1,\,\rho_2+1,\,\ldots,\,\rho_m+1) \text{ und } A^{(1)}(\rho_1,\,\rho_2,\,\ldots,\,\rho_m)$$

kennt. Dasselbe gilt aber auch für die Matrix

$$\mathfrak{P}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1\end{matrix}\right),$$

denn sie genügt der Gleichung

$$P\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\end{matrix}\right)\mathfrak{P}'\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1\end{matrix}\right)=$$
$$=\frac{\psi_{\sigma+m}(z)}{\psi_\sigma(z)}E,$$

so dass auch ihr Wert aus dem der Matrix

$$P\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\end{matrix}\right)$$

und folglich dem der beiden Koeffizientenmatrizen

$$A^{(1)}(\rho_1+1,\,\rho_2+1,\,\ldots,\,\rho_m+1) \text{ und } A^{(1)}(\rho_1,\,\rho_2,\,\ldots,\,\rho_m)$$

folgt. Man kann dieses Ergebnis folgendermassen aussprechen:

"Sind die beiden Matrizen

$$A(z\mid\rho_1,\,\rho_2,\,\ldots,\,\rho_m) \text{ und } A^{(1)}(\rho_1+1,\,\rho_2+1,\,\ldots,\,\rho_m+1)$$

bekannt, so ist die Matrix

$$A(z\mid\rho_1+1,\,\rho_2+1,\,\ldots,\,\rho_m+1)$$

eindeutig bestimmt. Kennt man auch noch die Matrix

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

so lässt sich die weitere Matrix

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1)$$

ebenfalls auf eindeutige Art angeben".

32.) Zweitens sei

$$\rho_1' = \rho_1+1,\ \rho_2' = \rho_2, \ldots, \rho_m' = \rho_m.$$

In diesem Fall sind beide Uebergangsmatrizen

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \text{ und } \mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right)$$

von erstem Grad in z. Die allgemeinen Formeln nehmen die Gestalt

$$\begin{aligned} P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) &= zA^{(-1)}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} + \\ &+ \left(A^{(-1)}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} \tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \right. \\ &\left. + A^{(0)}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) &= z\mathfrak{A}^{(-1)}\begin{pmatrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} + \\ &+ \left(\mathfrak{A}^{(-1)}\begin{pmatrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} \tilde{A}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \right. \\ &\left. + \mathfrak{A}^{(0)}\begin{pmatrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

an und zwar ist dabei

$$A^{(-1)}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$A^{(0)}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & 0 & \ldots & 0 \\ A_{21}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

ferner

$$\mathfrak{A}^{(-1)}\begin{pmatrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathfrak{A}^{(0)}\begin{pmatrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & \mathfrak{A}^{(1)}_{12}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m), \ldots, & \mathfrak{A}^{(1)}_{1m}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ 0, & \mathfrak{A}^{(1)}_{22}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m), \ldots, & \mathfrak{A}^{(1)}_{2m}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ \vdots & \vdots & \\ 0, & \mathfrak{A}^{(1)}_{m2}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m), \ldots, & \mathfrak{A}^{(1)}_{mm}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \end{pmatrix}.$$

Mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) &= A^{(1)\prime}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)+c^{(1)}_{\sigma}E, \\ \tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) &= -A^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), \\ \mathfrak{A}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m) &= -A^{(1)\prime}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m)-c^{(1)}_{\sigma+1}E \end{aligned}$$

lassen sich alle auftretenden Koeffizientenmatrizen durch die beiden speziellen

$$A^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } A^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

ausdrücken.

Alsdann wird in ausgerechneter Form:

$$P_{11}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = z+A^{(1)}_{11}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m)-$$

$$-A^{(1)}_{11}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

$$P_{1k}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = -A^{(1)}_{1k}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

$$(k = 2, 3, \ldots, m),$$

$$P_{h1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = +A^{(1)}_{h1}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

$$(h = 2, 3, \ldots, m),$$

$$P_{hh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = 1 \qquad (h = 2, 3, \ldots, m),$$

$$P_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = 0 \qquad (h, k = 2, 3, \ldots, m;\ h \neq k),$$

und entsprechend

$$\mathfrak{P}_{11}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = 1,$$

$$\mathfrak{P}_{1k}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = -A_{hk}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(k = 2, 3, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{P}_{h1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = +A_{1h}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h = 2, 3, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{P}_{hh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = z+A_{hh}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)-$$
$$-A_{hh}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m)+c_\sigma^{(1)}-c_{\sigma+1}^{(1)}$$
$$(h = 2, 3, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{P}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = A_{kh}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)-$$
$$-A_{kh}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h, k = 2, 3, \ldots, m;\ h \neq k).$$

Die beiden Matrizen

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \text{ und } \mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right)$$

sind hiernach eindeutig bestimmt, wenn man die beiden Koeffizientenmatrizen

$$A^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } A^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

kennt. Man kann demnach folgenden Satz aussprechen:

"*Sind die beiden Matrizen*

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } A^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

bekannt, so ist die Matrix

$$A(z \mid \rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

eindeutig bestimmt. Kennt man auch noch die Matrix

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

so lässt sich die weitere Matrix

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

ebenfalls auf eindeutige Art angeben".

33.) Drittens sei

$$\rho_1' = \rho_1+1,\ \rho_2' = \rho_2-1,\ \rho_3' = \rho_3,\ \ldots,\ \rho_m' = \rho_m.$$

Auch in diesem Fall sind beide Uebergangsmatrizen

$$P\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m\end{matrix}\right) \text{ und } \mathfrak{P}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m\\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m\end{matrix}\right)$$

von erstem Grad in z. Die allgemeinen Formeln nehmen die Gestalt

$$P\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m\end{matrix}\right) = zA^{(-1)}\begin{pmatrix}\rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m\end{pmatrix} +$$
$$+\left(A^{(-1)}\begin{pmatrix}\rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m\end{pmatrix}\tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) +\right.$$
$$\left.+\,A^{(0)}\begin{pmatrix}\rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m\end{pmatrix}\right),$$

$$\mathfrak{P}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m\\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m\end{matrix}\right) = z\mathfrak{A}^{(-1)}\begin{pmatrix}\rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m\\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m\end{pmatrix} +$$
$$+\left(\mathfrak{A}^{(-1)}\begin{pmatrix}\rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m\\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m\end{pmatrix}\tilde{A}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) +\right.$$
$$\left.+\left(\mathfrak{A}^{(0)}\begin{pmatrix}\rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m\\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m\end{pmatrix}\right)\right)$$

an, und zwar ist dabei

$$A^{(-1)}\begin{pmatrix}\rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}$$

und

$$A^{(0)}\begin{pmatrix}\rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix}A_{11}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m), & 0, & 0 & \ldots & 0\\ A_{21}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m), & 0, & 0 & \ldots & 0\\ A_{31}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m), & 0, & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{m1}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m), & 0, & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix},$$

ferner entsprechend hierzu:

$$\mathfrak{A}^{(-1)}\begin{pmatrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathfrak{A}^{(0)}\begin{pmatrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0, & \mathfrak{A}_{12}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m), & 0 \ldots 0 \\ 0, & \mathfrak{A}_{22}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m), & 0 \ldots 0 \\ 0, & \mathfrak{A}_{32}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m), & 1 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0, & \mathfrak{A}_{m2}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m), & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Mittels der Gleichungen

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) &= A^{(1)\prime}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + c_\sigma^{(1)} E, \\ \tilde{\mathfrak{A}}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) &= -A^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), \\ \mathfrak{A}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m) &= -A^{(1)\prime}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m) - c_\sigma^{(1)} E \end{aligned}$$

lassen sich alle auftretenden Koeffizientenmatrizen durch die beiden speziellen

$$A^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } A^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m)$$

ausdrücken.

Alsdann wird in ausgerechneter Form:

$$P_{11}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = z + A_{11}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m) -$$
$$- A_{11}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

$$P_{1k}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = -A_{1k}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(k = 2, 3, \ldots, m),$$

$$P_{h1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = +A_{h1}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m)$$
$$(h = 2, 3, \ldots, m),$$

$$P_{22}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = 0,$$

$$P_{hh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = 1 \qquad (h = 3, 4, \ldots, m),$$

$$P_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = 0 \qquad (h, k = 2, 3, \ldots, m;\ h \neq k),$$

und entsprechend

$$\mathfrak{P}_{11}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = 0,$$

$$\mathfrak{P}_{2k}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = +A_{k2}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(k = 1, 3, 4, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{P}_{h2}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = -A_{2h}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m)$$
$$(h = 1, 3, 4, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{P}_{22}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) =$$
$$= z + A_{22}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) - A_{22}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m),$$

$$\mathfrak{P}_{hh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = 1 \qquad (h = 3, 4, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{P}_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = 0 \qquad (h, k = 3, 4, \ldots, m;\ h \neq k).$$

Die beiden Matrizen

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) \text{ und } \mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right)$$

sind hiernach eindeutig bestimmt, wenn man die beiden Koeffizientenmatrizen

$$A^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } A^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m)$$

kennt. Man kann demnach auch folgenden Satz aussprechen:

"*Sind die beiden Matrizen*

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } A^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m)$$

bekannt, so ist die Matrix

$$A(z \mid \rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m)$$

eindeutig bestimmt. Kennt man auch noch die Matrix

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

so lässt sich die weitere Matrix

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m)$$

ebenfalls auf eindeutige Art angeben".

34.) Die drei letzten Paragraphen führen zu einem merkwürdigen Ergebnis. Nach ihnen lassen sich aus der Matrix

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

die Matrizen

$$A(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1),\ A(z \mid \rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$
$$A(z \mid \rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m)$$

eindeutig bestimmen, wenn man die zugehörigen ersten Koeffizientenmatrizen

$$A^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1),\ A^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$
$$A^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m)$$

kennt; aus Symmetriegründen müssen sich also auch die Matrizen

$$A(z \mid \rho_1+\delta_{f1}, \rho_2+\delta_{f2}, \ldots, \rho_m+\delta_{fm}),$$
$$A(z \mid \rho_1+\delta_{f1}-\delta_{g1}, \rho_2+\delta_{f2}-\delta_{g2}, \ldots, \rho_m+\delta_{fm}-\delta_{gm})$$
$$(f, g = 1, 2, \ldots, m;\ f \neq g)$$

eindeutig bestimmen lassen, wenn man ihre ersten Koeffizientenmatrizen

$$A^{(1)}(\rho_1+\delta_{f1}, \rho_2+\delta_{f2}, \ldots, \rho_m+\delta_{fm}),$$
$$A^{(1)}(\rho_1+\delta_{f1}-\delta_{g1}, \rho_2+\delta_{f2}-\delta_{g2}, \ldots, \rho_m+\delta_{fm}-\delta_{gm})$$

kennt. Wendet man diesen Schluss mehrmals hintereinander an, so folgt, dass man aus der Matrix

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

in eindeutiger Weise alle Matrizen

$$A(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')$$

mit

$$\sum_{k=1}^{m} \rho_k' \geqq \sum_{k=1}^{m} \rho_k$$

bestimmen kann, wenn die ersten Koeffizientenmatrizen

$$A^{(1)}(\rho_1^{(\tau)}, \rho_2^{(\tau)}, \ldots, \rho_m^{(\tau)}) \qquad (\tau = 0, 1, \ldots, t)$$

für eine Kette von Parametersystemen

$$\rho_1^{(\tau)}, \rho_2^{(\tau)}, \ldots, \rho_m^{(\tau)} \qquad (\tau = 0, 1, \ldots, t)$$

mit

$$\rho_1^{(0)} = \rho_1, \rho_2^{(0)} = \rho_2, \ldots, \rho_m^{(0)} = \rho_m; \rho_1^{(t)} = \rho_1', \rho_2^{(t)} = \rho_2', \ldots, \rho_m^{(t)} = \rho_m'$$

gegeben sind, von denen jedes aus dem vorangehenden hervorgeht, indem man entweder alle Parameter gleichzeitig oder nur einen einzelnen um Eins vermehrt oder indem man zu einem der Parameter Eins addiert und von einem anderen Eins subtrahiert.

Nun ist aber

$$A(z \mid 0, 0, \ldots, 0) = E,$$

wie aus der Definition und den Eigenschaften dieser Matrix unmittelbar folgt. Wegen der allgemeinen Identität

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\mathfrak{A}'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \psi_\sigma(z)E$$

ist folglich auch

$$\mathfrak{A}(z \mid 0, 0, \ldots, 0) = E.$$

Also lässt sich der folgende Satz aufstellen:

"*Wenn die erste Koeffizientenmatrix*

$$A^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

für alle Werte der Parameter bekannt ist, so sind sowohl die Matrizen

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

als auch die Matrizen

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

gleichfalls für alle Werte der Parameter eindeutig bestimmt".

Es genügen also schon die sämtlichen ersten Koeffizientenmatrizen, um auch die beiden Näherungsmatrizen für alle Parameterwerte auszurechnen. Dabei ist bemerkenswert, dass dann bei dieser Ausrechnung kein Gebrauch gemacht werden muss von diesen Funktionen

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z),$$

die angenähert werden sollen.

35.) Alle bisherigen Ergebnisse nehmen eine besonders einfache Gestalt an, wenn $m = 2$ vorausgesetzt wird. Dann bestehen die Identitäten

$$\begin{aligned}
A_{11}(z \mid \rho_1, \rho_2)f_1(z)+A_{12}(z \mid \rho_1, \rho_2)f_2(z) &= R_1(z \mid \rho_1, \rho_2),\\
A_{21}(z \mid \rho_1, \rho_2)f_1(z)+A_{22}(z \mid \rho_1, \rho_2)f_2(z) &= R_2(z \mid \rho_1, \rho_2),\\
\mathfrak{A}_{22}(z \mid \rho_1, \rho_2)f_1(z)-\mathfrak{A}_{21}(z \mid \rho_1, \rho_2)f_2(z) &= \mathfrak{R}_{212}(z \mid \rho_1, \rho_2),\\
-\mathfrak{A}_{12}(z \mid \rho_1, \rho_2)f_1(z)+\mathfrak{A}_{11}(z \mid \rho_1, \rho_2)f_2(z) &= \mathfrak{R}_{121}(z \mid \rho_1, \rho_2),
\end{aligned}$$

und die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\left|\overline{A_{11}(z \mid \rho_1, \rho_2)}\right| = \rho_1, && \left|\overline{A_{12}(z \mid \rho_1, \rho_2)}\right| = \rho_2-1,\\
&\left|\overline{A_{21}(z \mid \rho_1, \rho_2)}\right| = \rho_1-1, && \left|\overline{A_{22}(z \mid \rho_1, \rho_2)}\right| = \rho_2,\\
&\left|\overline{R_1\ (z \mid \rho_1, \rho_2)}\right| = \sigma, && \left|\overline{R_2\ (z \mid \rho_1, \rho_2)}\right| = \sigma,\\
&\left|\overline{\mathfrak{A}_{22}(z \mid \rho_1, \rho_2)}\right| = \rho_1, && \left|\overline{\mathfrak{A}_{21}(z \mid \rho_1, \rho_2)}\right| = \rho_2-1,\\
&\left|\overline{\mathfrak{A}_{12}(z \mid \rho_1, \rho_2)}\right| = \rho_1-1, && \left|\overline{\mathfrak{A}_{11}(z \mid \rho_1, \rho_2)}\right| = \rho_2,\\
&\left|\overline{\mathfrak{R}_{212}(z \mid \rho_1, \rho_2)}\right| = \sigma, && \left|\overline{\mathfrak{R}_{121}(z \mid \rho_1, \rho_2)}\right| = \sigma,
\end{aligned}$$

so dass man auf Grund der beiden Eindeutigkeitssätze zu den folgenden Uebereinstimmungen kommt:

$$\begin{aligned}
A_{11}(z \mid \rho_1, \rho_2) &= +\mathfrak{A}_{22}(z \mid \rho_1, \rho_2), & A_{12}(z \mid \rho_1, \rho_2) &= -\mathfrak{A}_{21}(z \mid \rho_1, \rho_2),\\
A_{21}(z \mid \rho_1, \rho_2) &= -\mathfrak{A}_{12}(z \mid \rho_1, \rho_2), & A_{22}(z \mid \rho_1, \rho_2) &= +\mathfrak{A}_{11}(z \mid \rho_1, \rho_2),\\
R_1\ (z \mid \rho_1, \rho_2) &= \mathfrak{R}_{212}(z \mid \rho_1, \rho_2), & R_2\ (z \mid \rho_1, \rho_2) &= \mathfrak{R}_{121}(z \mid \rho_1, \rho_2).
\end{aligned}$$

Diese Beziehungen sind wegen

$$\begin{aligned}
D(z|\rho_1, \rho_2) &= A_{11}(z|\rho_1, \rho_2)A_{22}(z|\rho_1, \rho_2)-A_{12}(z|\rho_1, \rho_2)A_{21}(z|\rho_1, \rho_2)\\
&= \psi_{\rho_1+\rho_2}(z)
\end{aligned}$$

auch eine unmittelbare Folgerung aus der früher bewiesenen Beziehung

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2)\mathfrak{A}'(z \mid \rho_1, \rho_2) = \psi_{\rho_1+\rho_2}(z)E.$$

Es ist also hinreichend, sich auf die Untersuchung der einzigen Matrix

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2)$$

zu beschränken, wenn $m = 2$ ist. Alsdann nehmen die Funktionalgleichungen aus den letzten Paragraphen die einfache Gestalt

$$\begin{aligned}
&A(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1) =\\
&= \begin{pmatrix} z+A_{11}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2+1)-A_{11}^{(1)}(\rho_1, \rho_2), & A_{12}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2+1)-A_{12}^{(1)}(\rho_1, \rho_2)\\ A_{21}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2+1)-A_{21}^{(1)}(\rho_1, \rho_2), & z+A_{22}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2+1)-A_{22}^{(1)}(\rho_1, \rho_2) \end{pmatrix} \times\\
&\qquad \times A(z \mid \rho_1, \rho_2)
\end{aligned}$$

und

$$A(z \mid \rho_1+1, \rho_2) =$$
$$= \begin{pmatrix} z+A_{11}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2)-A_{11}^{(1)}(\rho_1, \rho_2), & -A_{12}^{(1)}(\rho_1, \rho_2) \\ +A_{21}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2), & 1 \end{pmatrix} A(z \mid \rho_1, \rho_2)$$

und

$$A(z \mid \rho_1+1, \rho_2-1) =$$
$$= \begin{pmatrix} z+A_{11}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1)-A_{11}^{(1)}(\rho_1, \rho_2), & -A_{12}^{(1)}(\rho_1, \rho_2) \\ +A_{21}^{(1)}(\rho_1+1, \rho_2-1), & 0 \end{pmatrix} A(z \mid \rho_1, \rho_2)$$

an. Man kommt in diesem einfachen Fall auf die gewöhnlichen Kettenbruchentwicklungen für das Verhältnis

$$-f_1(z) : f_2(z)$$

zurück.

V.

36.) Durch die bisherigen Ergebnisse wird ein Einblick in die Eigenschaften der Matrizen

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2 \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2 \ldots, \rho_m)$$

gewährt. Es soll nun gezeigt werden, wie man dieselben wirklich berechnen kann.

Diese Berechnung kann auf zweierlei Arten geschehen, entweder nach Hermite durch ein rekursives Verfahren, indem man die Matrizen

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right), \quad P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2 \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2 \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right),$$
$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right),$$

$$\mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \end{matrix}\right), \quad \mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right),$$
$$\mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right)$$

aus den Werten der Funktionen

$$R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

berechnet und alsdann von den Formeln

$$A(z \mid 0, 0, \ldots, 0) = E \text{ und } \mathfrak{A}(z \mid 0, 0, \ldots, 0) = E$$

zu immer grösseren Parameterwerten aufsteigt, oder indem man alle Matrizen

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \text{ und } \mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

in geschlossener Form mittels Determinanten ausdrückt. Diese beiden Verfahren sind besonders einfach bei den Matrizen

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m);$$

aus diesem Grunde beschränken wir uns im allgemeinen auf ihre Betrachtung.

37.) Seien

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \text{ und } \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'$$

zwei verschiedene Parametersysteme mit

$$\sum_{k=1}^{m} \rho_k \leqq \sum_{k=1}^{m} \rho_k'.$$

Alsdann ist nach Definition

$$A_{hk}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} P_{hj}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) A_{jk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{P}_{hj}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) \mathfrak{A}_{jk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, m),$$

ferner ist

$$R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{k=1}^{m} A_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z)$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m),$$

$$R_h(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') = \sum_{k=1}^{m} A_{hk}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') f_k(z)$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m)$$

und

$$\mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \mathfrak{A}_{hl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z) - \mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_l(z)$$
$$(h, k, l = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') =$$
$$= \mathfrak{A}_{kl}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') f_k(z) - \mathfrak{A}_{hk}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') f_l(z)$$
$$(h, k, l = 1, 2, \ldots, m).$$

Also müssen auch die Transformationsformeln

$$R_h(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} P_{hj}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \\ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) R_j(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m)$$
$$\mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{P}_{hj}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m' \end{matrix}\right) \mathfrak{R}_{jkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h, k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

bestehen.

Gemäss den Voraussetzungen sind die Funktionen

$$R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\psi_\sigma(z)^{-1}, \quad R_h(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')\psi_{\sigma'}(z)^{-1},$$
$$\mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\psi_\sigma(z)^{-1}, \quad \mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')\psi_{\sigma'}(z)^{-1},$$

die in diesen Gleichungen auftreten, in allen Punkten

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

regulär. Sie lassen sich also in endliche Interpolationsreihen

$$R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \sum_{\lambda=\sigma}^{\mu-1} R_h^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\psi_\lambda(z) + R_h^{(\mu)}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\psi_\mu(z),$$
$$R_h(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') =$$
$$= \sum_{\lambda=\sigma'}^{\mu-1} R_h^{(\lambda)}(\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')\psi_\lambda(z) + R_h^{(\mu)}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')\psi_\mu(z),$$
$$\mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \sum_{\lambda=\sigma}^{\mu-1} \mathfrak{R}_{hkl}^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\psi_\lambda(z) + \mathfrak{R}_{hkl}^{(\mu)}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\psi_\mu(z),$$
$$\mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m') =$$
$$= \sum_{\lambda=\sigma'}^{\mu-1} \mathfrak{R}_{hkl}^{(\lambda)}(\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')\psi_\lambda(z) + \mathfrak{R}_{hkl}^{(\mu)}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')\psi_\mu(z)$$

entwickeln, wobei die Restfunktionen

$$R_h^{(\mu)}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),\ R_h^{(\mu)}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'),$$
$$\mathfrak{R}_{hkl}^{(\mu)}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),\ \mathfrak{R}_{hkl}^{(\mu)}(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')$$

in G regulär und die Koeffizienten

$$R_h^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),\ R_h^{(\lambda)}(\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m'),$$
$$\mathfrak{R}_{hkl}^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),\ \mathfrak{R}_{hkl}^{(\lambda)}(\rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')$$

von z unabhängig sind.

38.) Die letzten Ergebnisse führen leicht zur Berechnung der sechs Matrizen

$$P\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right),\ P\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right),$$
$$P\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right),$$

$$\mathfrak{P}\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \end{matrix}\right),\ \mathfrak{P}\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right),$$
$$\mathfrak{P}\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right).$$

Zuerst werde die Matrix

$$P\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right)$$

betrachtet. Ihre Elemente haben nach 31.) die Form

$$P_{hk}\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) =$$
$$= \delta_{hk} z + P_{hk}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix} \quad (h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

mit von z unabhängigen Grössen

$$P_{hk}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix}$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Es ist

$$A_{hk}(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} P_{hj}\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix} \right.\right) A_{jk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$R_h(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} P_{hj}\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix} \right.\right) R_j\,(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m);$$

ferner muss nach Definition

$$\left|\overline{A_{hk}(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1)}\right| \leqq \rho_k+\delta_{hk}$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\left|\underline{R_h\,(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1)}\right| \geqq \sigma+m$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m)$$

sein. Hiervon folgen aber die Gradungleichungen ohne weiteres aus den Voraussetzungen

$$\left|\overline{A_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}\right| \leqq \rho_k+\delta_{hk}-1$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\left|\overline{P_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix} \right.\right)}\right| \leqq \delta_{hk}$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Also muss die Matrix

$$P\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix} \right.\right)$$

schon bestimmt sein durch die Ordnungsungleichungen

$$\left|\underline{R_h(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1)}\right| \geqq \sigma+m$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m)$$

und wegen der Eindeutigkeit dieser Matrix müssen sich die Konstanten

$$P_{hk}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

schon allein aus diesen Ungleichungen erhalten lassen.

Jetzt ist nach 37.)

$$R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \sum_{\lambda=\sigma}^{\sigma+m-1} R_h^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\psi_\lambda(z) + R_h^{(\sigma+m)}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\psi_{\sigma+m}(z)$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m),$$
$$R_h(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1) =$$
$$= R_h^{(\sigma+m)}(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1)\psi_{\sigma+m}(z)$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m).$$

Setzt man diese Werte in die Identitäten

$$R_h(z \mid \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} P_{hj}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) R_j(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m)$$

ein, so folgt, dass jedes der m Polynome

$$Q_h(z) =$$
$$= \sum_{\lambda=\sigma}^{\sigma+m-1} \psi_\lambda(z) \sum_{j=1}^{m} P_{hj}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) R_j^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m)$$

durch das Polynom

$$\psi_{\sigma+m}(z)$$

teilbar sein muss. Das sind genau m^2 lineare Gleichungen für die m^2 Ausdrücke

$$P_{hk}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix} \quad (h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

und wegen der Eindeutigkeit der letzteren muss die Determinante des Systems von Null verschieden sein.

39.) Um nun zu einfachen Lösungsformeln zu kommen, beachte man, dass

$$\sum_{j=1}^{m} P_{hj}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) R_j^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= (z-z_{\lambda+1})R_h^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \left(\delta_{hj} z_{\lambda+1} + P_{hj}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix}\right) R_j^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

ist; es wird somit

$$Q_h(z) = \sum_{\lambda=\sigma}^{\sigma+m} Q_h^{(\lambda)} \psi_\lambda(z) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

mit den Abkürzungen

$$Q_h^{(\sigma)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\delta_{hj} z_{\sigma+1} + P_{hj}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix}\right) R_j^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),$$

$$Q_h^{(\lambda)} = \sum_{j=1}^{m} \left(\delta_{hj} z_{\lambda+1} + P_{hj}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix}\right) R_j^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) +$$
$$+ R_h^{(\lambda-1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (\lambda = \sigma+1, \sigma+2, \ldots, \sigma+m-1),$$
$$Q_h^{(\sigma+m)} = R_h^{(\sigma+m-1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m).$$

Offenbar können aber die Polynome

$$\sum_{\lambda=\sigma}^{\sigma+m} Q_h^{(\lambda)} \psi_\lambda(z) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

nur dann durch $\psi_{\sigma+m}(z)$ teilbar sein, wenn die m^2 Gleichungen

$$Q_h^{(\lambda)} = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m; \lambda = \sigma, \sigma+1, \ldots, \sigma+m-1)$$

erfüllt sind. Es müssen also folgende m^2 inhomogenen linearen Gleichungen von den Konstanten

$$P_{hk}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

befriedigt werden:

$$0 = \sum_{j=1}^{m} P_{hj}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix} R_j^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) +$$
$$+ z_{\sigma+1} R_h^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

$$0 = \sum_{j=1}^{m} P_{hj}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix} R_j^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) +$$
$$+ z_{\lambda+1} R_h^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + R_h^{(\lambda-1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$\begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, m \\ \lambda = \sigma+1, \sigma+2, \ldots, \sigma+m-1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem kann durch Matrizen sehr leicht in expliziter Gestalt aufgelöst werden. Dazu werde zur Abkürzung

$$\mathsf{P}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$= \begin{pmatrix} R_1^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), R_1^{(\sigma+1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), \ldots, R_1^{(\sigma+m-1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ R_2^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), R_2^{(\sigma+1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), \ldots, R_2^{(\sigma+m-1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ R_m^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), R_m^{(\sigma+1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), \ldots, R_m^{(\sigma+m-1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathsf{Z}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \begin{pmatrix} z_{\sigma+1}, & 1, & 0 & \ldots & 0, & 0 \\ 0, & z_{\sigma+2}, & 1 & \ldots & 0, & 0 \\ 0, & 0, & z_{\sigma+3}, & \ldots & 0, & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0, & 0, & 0 & \ldots & z_{\sigma+m-1}, & 1 \\ 0, & 0, & 0 & \ldots & 0, & z_{\sigma+m} \end{pmatrix}$$

gesetzt. Die vorigen Gleichungen sind dann gleichwertig der einen Matrizengleichung

$$P\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix} \mathsf{P}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \\ + \mathsf{P}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\mathsf{Z}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = 0$$

und lassen sich also lösen in der Form

$$P\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix} = \\ = -\mathsf{P}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\mathsf{Z}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\mathsf{P}(\rho_1, \rho_2 \ldots \rho_m)^{-1}$$

oder auch

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = \\ = \mathsf{P}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\big(Ez-\mathsf{Z}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\big)\mathsf{P}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Matrix

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right)$$

folgt hieraus erstens, dass die Determinante jeder Matrix

$$\mathsf{P}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

ungleich Null sein muss; *dies ist eine neue Eigenschaft, wodurch sich die vollkommenen Funktionssysteme auszeichnen.*

Zweitens folgt aus den letzten Gleichungen als Probe wieder beim Uebergang zu den Determinanten

$$\left| P\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) \right| = \frac{\psi_{\sigma+m}(z)}{\psi_\sigma(z)},$$

$$\left| P\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix} \right| = (-1)^m z_{\sigma+1}, z_{\sigma+2}, \ldots, z_{\sigma+m},$$

wie schon früher bewiesen wurde.

40.) Die Formel für

$$P\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right)$$

ergibt wegen

$$P\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) \mathfrak{P}'\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \end{matrix}\right) =$$
$$= \frac{\psi_{\sigma+m}(z)}{\psi_\sigma(z)} E$$

die weitere Gleichung

$$\mathfrak{P}'\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \end{matrix}\right) =$$
$$= \frac{\psi_{\sigma+m}(z)}{\psi_\sigma(z)} \mathsf{P}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)(Ez - \mathsf{Z}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m))^{-1} \mathsf{P}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1}.$$

Es ist aber auch möglich, die Matrix

$$\mathfrak{P}\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \end{matrix}\right)$$

in independenter Weise als Funktion der Koeffizienten

$$\mathfrak{R}_{jkl}^{(\lambda)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

darzustellen. Es ist dazu nur nötig, ihre Elemente

$$\mathfrak{P}_{hk}\left(z \middle| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \end{matrix}\right) = \delta_{hk} z^{m-1}$$

plus niedrigere Potenzen von z

so zu wählen, dass die sämtlichen Polynome in z

$$\mathfrak{Q}_{hkl}(z) =$$

$$= \sum_{\lambda=\sigma}^{\sigma+m-1} \psi_\lambda(z) \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{P}_{hj}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \end{matrix}\right) \mathfrak{R}^{(\lambda)}_{jkl}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

$$(h, k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

gleichzeitig durch

$$\psi_{\sigma+m}(z)$$

teilbar werden. Die hierzu notwendigen Rechnungen scheinen jedoch sehr umständlich zu sein; es werde daher darauf verzichtet, sie wirklich durchzuführen.

41.) Zweitens werde die Matrix

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right)$$

bestimmt. Nach 32.) besitzen ihre Elemente die Form

$$P_{11}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = z + P_{11}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix},$$

$$P_{1k}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = P_{1k}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix}$$

$$(k = 2, 3, \ldots, m),$$

$$P_{h1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = P_{h1}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix}$$

$$(h = 2, 3, \ldots, m),$$

$$P_{hh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = 1 \qquad (h = 2, 3, \ldots, m),$$

$$P_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = 0 \quad (h, k = 2, 3, \ldots, m;\ h \neq k),$$

und zwar war bereits festgestellt worden, dass

$$P_{1k}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} = -A^{(1)}_{1k}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

$$(k = 2, 3, \ldots, m)$$

ist. Um auch noch die Elemente mit $h = 1$ zu erhalten, werde von den Gleichungen

$$\left[R_h(z \mid \rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\right] = \sigma+1 \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

$$R_h(z \mid \rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \\ = \sum_{j=1}^{m} P_{hj}\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right.\right) R_j(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

$$R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \\ = R_h^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\psi_\sigma(z) + R_h^{(\sigma+1)}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\psi_{\sigma+1}(z) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

Gebrauch gemacht. Es müssen hiernach das Polynom

$$\psi_\sigma(z)\Bigg(zR_1^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \\ + \sum_{j=1}^{m} P_{1j}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} R_j^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\Bigg)$$

und die Polynome

$$\psi_\sigma(z)\left(P_{h1}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} R_1^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + R_h^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\right) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

durch $\psi_{\sigma+1}(z)$ ohne Rest teilbar sein; das führt auf die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{m} P_{1j}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} R_j^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \\ + z_{\sigma+1}R_1^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = 0,$$

$$P_{h1}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} R_1^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + R_h^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = 0 \qquad (h = 2, 3, \ldots, m)$$

und liefert also die Werte

$$P_{11}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} = \\ = -z_{\sigma+1} + \sum_{k=2}^{m} \frac{A_{1k}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) R_k^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{R_1^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)},$$

$$P_{h1}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} = -\frac{R_h^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{R_1^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)} \qquad (h = 2, 3, \ldots, m),$$

womit auch die restlichen Koeffizienten bestimmt sind.

42.) Man kann die letzten Formeln zusammenfassen in eine einzige Matrizengleichung. Seien zu diesem Zweck zur Abkürzung die Matrizen

$$\mathsf{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \begin{pmatrix} z-z_{\sigma+1}, & -A_{12}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & -A_{1m}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathsf{R}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0, & \ldots, & 0 \\ \dfrac{R_2^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{R_1^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}, & 1, & \ldots, & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{R_m^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{R_1^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}, & 0, & \ldots, & 1 \end{pmatrix}$$

eingeführt. Es ist dann offenbar

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \mathsf{R}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \mathsf{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

und also schliesslich

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = \mathsf{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\mathsf{R}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1}.$$

Beim Uebergang zu den Determinanten folgt hieraus wieder

$$\left| P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \right| = z-z_{\sigma+1},$$

wie es sein muss.

43.) Wegen

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \mathfrak{P}'\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = (z - z_{\sigma+1})E$$

ergibt sich aus den letzten Formeln die Gleichung

$$\mathfrak{P}'\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) =$$
$$= (z-z_{\sigma+1})\, \mathsf{R}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\mathsf{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1}.$$

Aber es ist auch möglich, diese Matrix in independenter Weise als Funktion der Koeffizienten

$$\mathfrak{A}_{hk}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),\ \mathfrak{R}_{hkl}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

darzustellen. Es ist nämlich nach 32.)

$$\mathfrak{P}_{11}\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix} \right.\right) = 1,$$

$$\mathfrak{P}_{h1}\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix} \right.\right) = -\mathfrak{A}_{h1}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (h = 2, 3, \ldots, m)$$

und ferner

$$\mathfrak{P}_{hk}\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix} \right.\right) = \delta_{hk} z + \mathfrak{P}_{hk}\begin{pmatrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, m \\ k = 2, 3, \ldots, m \end{pmatrix},$$

wobei die Ausdrücke

$$\mathfrak{P}_{hk}\begin{pmatrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{pmatrix}$$

im Augenblick noch unbekannte Konstante sind. Weiter erhält man hieraus und aus den Formeln

$$\begin{aligned} &\mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \\ &\quad = \mathfrak{R}_{hkl}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\psi_\sigma(z) + \mathfrak{R}_{hkl}^{(\sigma+1)}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\psi_{\sigma+1}(z) \\ &\qquad\qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, m), \\ &\mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \\ &\quad = \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{P}_{hj}\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix} \right.\right) \mathfrak{R}_{jkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ &\qquad\qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, m), \\ &\left\lfloor \mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \right\rfloor \geqq \sigma+1 \qquad (h, k, l = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

die linearen Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{m} \mathfrak{P}_{1j}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \mathfrak{R}_{jkl}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = 0$$

$$(k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \mathfrak{P}_{hj}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \mathfrak{R}_{jkl}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$

$$= (z-z_{\sigma+1})\mathfrak{R}_{hkl}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \quad \begin{pmatrix} h = 2, 3, \ldots, m \\ k, l = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

Das System der m^2 Indizespaare

$$k, l \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

werde jetzt in einer ein für allemal festen Reihenfolge angeordnet und symbolisch mit

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_M \qquad (M = m^2)$$

bezeichnet. Führt man dann die beiden Matrizen aus m Zeilen und m^2+1 Spalten

$$\mathscr{R}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & \mathfrak{R}_{1\mathfrak{p}_1}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & \mathfrak{R}_{1\mathfrak{p}_M}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ 0, & \mathfrak{R}_{2\mathfrak{p}_1}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & \mathfrak{R}_{2\mathfrak{p}_M}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ \vdots & \vdots & & \\ 0, & \mathfrak{R}_{m\mathfrak{p}_1}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & \mathfrak{R}_{m\mathfrak{p}_M}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathscr{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ -\mathfrak{A}_{21}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & (z-z_{\sigma+1})\mathfrak{R}_{2\mathfrak{p}_1}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & (z-z_{\sigma+1})\mathfrak{R}_{2\mathfrak{p}_M}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\mathfrak{A}_{m1}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & (z-z_{\sigma+1})\mathfrak{R}_{m\mathfrak{p}_1}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & \ldots, & (z-z_{\sigma+1})\mathfrak{R}_{m\mathfrak{p}_M}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \end{bmatrix}$$

ein, so ist offenbar gerade

$$\mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2. \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \mathscr{R}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \mathscr{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m);$$

ist

$$\mathscr{R}^*(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

irgend eine m-spaltige quadratische Untermatrix von

$$\mathscr{R}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

und

$$\mathscr{A}^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

die kongruente m-spaltige quadratische Untermatrix von

$$\mathscr{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

so gilt also auch

$$\mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right)\mathscr{R}^*(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \mathscr{A}^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

oder

$$\mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = \mathscr{A}^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\mathscr{R}^*(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1},$$

wenn die Matrix

$$\mathscr{R}^*(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

nichtverschwindende Determinante hat. Man kann aber leicht zeigen, dass

$$\mathscr{R}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

wirklich solche Untermatrizen mit nichtverschwindender Determinante, also den Rang m hat. Denn wäre der Rang geringer, so müssten die letzten $m-1$ Zeilen von einander linear abhängig sein; es gäbe also $m-1$ Konstante

$$c_2, c_3, \ldots, c_m$$

die nicht alle verschwinden, so dass

$$\sum_{j=2}^{m} c_j \mathfrak{R}_{jkl}^{(\sigma)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = 0 \quad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

ist. Sei zur Abkürzung

$$\mathfrak{A}_k^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{j=2}^{m} c_j \mathfrak{A}_{jk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\mathfrak{R}_{kl}^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \sum_{j=2}^{m} c_j \mathfrak{R}_{jkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

so dass also die Gleichungen

$$\mathfrak{R}_{kl}^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \mathfrak{A}_l^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) f_k(z) - \mathfrak{A}_k^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

und die Ungleichungen

$$\left|\mathfrak{A}_k^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\right| \leqq \sigma - \rho_k - \delta_{1k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\left|\mathfrak{R}_{kl}^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\right| \geqq \sigma + 1 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

bestehen.

Es ist nun

$$\left|\mathfrak{A}_{jk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\right| = \sigma - \rho_k + \delta_{jk} - 1 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m)$$

und also können die Polynome

$$\mathfrak{A}_k^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 2, 3, \ldots, m)$$

nicht alle identisch in z verschwinden. Das steht aber, zusammen mit den oberen Schranken für die Grade der Polynome

$$\mathfrak{A}_k^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

und den unteren Schranken für die Ordnungen der Funktionen

$$\mathfrak{R}_{kl}^*(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, m),$$

im Widerspruch zum 3. Kriterium. Also folgt, dass

$$\mathscr{R}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

wirklich vom Rang m ist.

44.) Drittens soll die Matrix

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right)$$

allein als Funktion der Koeffizienten der Polynome

$$A_{hk}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, m)$$

bestimmt werden. Es ist nach 33.)

$$P_{h1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = \delta_{h1} z + P_{h1}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m),$$

$$P_{1k}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = -A_{1k}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 2, 3, \ldots, m),$$

$$P_{22}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = 0,$$

$$P_{hh}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = 1 \qquad (h = 3, 4, \ldots, m),$$

$$P_{hk}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_2+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = 0 \qquad (h, k = 2, 3, \ldots, m;\ h \neq k),$$

wobei die Koeffizienten

$$P_{h1}\begin{pmatrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{pmatrix} \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

nicht von z abhängen. Ferner gelten die Gleichungen

$$A_{h2}(z \mid \rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} P_{hj}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) A_{j2}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m)$$

und die Gradbeziehungen

$$\lceil A_{h2}(z \mid \rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m \rceil = \rho_2 + \delta_{h2} - 2$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m),$$

und zwar ist der höchste Koeffizient des Polynoms

$$A_{22}(z \mid \rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m)$$

gleich Eins. Daraus folgt durch Einsetzen der Potenzreihen für die sämtlichen Polynome das System von Gleichungen:

$$\sum_{j=1}^{m} P_{hj}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) A_{j2}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$
$$= \begin{cases} A_{12}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) z - A_{12}^{(2)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) & \text{für } h = 1, \\ 1 & \text{für } h = 2, \\ 0 & \text{für } h = 3, 4, \ldots, m \end{cases}$$

und daraus für die noch unbekannten Polynome

$$P_{11}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = z - \frac{A_{12}^{(2)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{A_{12}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)} +$$
$$+ \sum_{j=2}^{m} \frac{A_{1j}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) A_{j2}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{A_{12}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)},$$

$$P_{21}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = \frac{1}{A_{12}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)},$$

$$P_{h1}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right) = -\frac{A_{h2}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}{A_{12}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)}$$
$$(h = 3, 4, \ldots, m),$$

so dass damit die Matrix

$$P\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\end{matrix}\right)$$

jetzt vollständig bekannt ist. Es gelingt wieder leicht, alle diese Formeln in einer einzigen Matrizengleichung zu vereinigen. Dazu sei

$$a_1(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \begin{bmatrix} 0, & A_{12}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & 0, & \ldots, & 0\\ 1, & A_{22}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & 0, & \ldots, & 0\\ 0, & A_{32}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & 1, & \ldots, & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0, & A_{m2}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & 0, & \ldots, & 1 \end{bmatrix}$$

und

$$a_2(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{12}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & A_{12}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)z-A_{12}^{(2)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m), & A_{13}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m, & \ldots, & A_{1m}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0\\ 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \end{bmatrix}.$$

Dann ist offenbar

$$P\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\end{matrix}\right)a_1(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = a_2(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

und also

$$P\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m\\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\end{matrix}\right) = a_2(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)a_1(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1}.$$

45.) Das letzte Ergebnis liefert auch den Wert der Matrix

$$\mathfrak{P}\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m\\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m\end{matrix}\right);$$

wegen

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) \mathfrak{P}'\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = E$$

ist nämlich

$$\mathfrak{P}'\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right) = a_1(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) a_2(z \,|\, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)^{-1}.$$

Es ist hier möglich, die Koeffizienten

$$A_{12}^{(2)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),\ A_{1k}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),\ A_{h2}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k \neq 1,\ h \neq 2)$$

durch die Koeffizienten

$$\mathfrak{A}_{21}^{(2)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),\ \mathfrak{A}_{k1}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m),\ \mathfrak{A}_{2h}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k \neq 1,\ h \neq 2)$$

zu ersetzen, vermöge der Gleichungen

$$A_{1k}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = -\mathfrak{A}_{k1}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (k = 2, 3, \ldots, m),$$

$$A_{h2}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = -\mathfrak{A}_{2h}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (h = 1, 3, \ldots, m),$$

$$A_{12}^{(2)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = -\mathfrak{A}_{21}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + \\ + \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{A}_{j1}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \mathfrak{A}_{2j}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) + c_\sigma^{(1)} \mathfrak{A}_{21}^{(1)}(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m).$$

Es werde darauf verzichtet, die so entstehende explizite Form von

$$\mathfrak{P}\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \rho_m \\ \rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right)$$

wirklich hinzuschreiben; Schwierigkeiten treten hierbei nicht auf.

46.) Die Ergebnisse der letzten Paragraphen zeigen bemerkenswerte Unterschiede zwischen den drei Matrizen

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, \rho_2+1, \ldots, \rho_m+1 \\ \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_m \end{matrix}\right),\ P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, \rho_2, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, \quad \rho_2, \ldots, \rho_m \end{matrix}\right),$$

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, \rho_2-1, \ldots, \rho_m \\ \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \rho_m \end{matrix}\right).$$

Um die erste zu bestimmen, ist es gar nicht nötig, die Matrix

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

zu den Parameterwerten

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

wirklich zu kennen; dagegen müssen die Funktionen

$$R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

in den Punkten

$$z_\sigma, z_{\sigma+1}, \ldots, z_{\sigma+m}$$

gegeben sein. Um die zweite Matrix auszurechnen, muss man dagegen die erste Zeile der Matrix

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

und die Funktionen

$$R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

in den Punkten

$$z_\sigma, z_{\sigma+1}$$

kennen. Am allermerkwürdigsten ist schliesslich die dritte Matrix

$$P\left(z \,\middle|\, \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix}\right).$$

Ihr Wert ist schon dann eindeutig bestimmt, wenn von der Matrix

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

die erste Zeile und die zweite Spalte bekannt sind; dagegen ist es in keiner Weise nötig, die Funktionen

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_m(z)$$

oder die Funktionen

$$R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

oder auch nur das Punktsystem

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

zu kennen. Allgemeiner folgt, dass sich die sämtlichen Matrizen

$$A(z \mid \rho_1', \rho_2', \ldots, \rho_m')$$

eindeutig bestimmen lassen, die dieselbe Parametersumme

$$\sum_{k=1}^{m} \rho_k' = \sigma$$

wie die bekannte Matrix

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

haben.

Aehnlich ist die Lage bei den drei Matrizen

$$\mathfrak{P}\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2+1, & \ldots, & \rho_m+1 \end{matrix} \right.\right), \mathfrak{P}\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix} \right.\right),$$

$$\mathfrak{P}\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1+1, & \rho_2-1, & \ldots, & \rho_m \end{matrix} \right.\right);$$

von ihnen ist z.B. die erste bestimmbar, wenn man die Werte der Funktionen

$$\mathfrak{R}_{hkl}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \quad (h, k, l = 1, 2, \ldots, m)$$

in den Punkten

$$z_\sigma, z_{\sigma+1}, \ldots, z_{\sigma+m}$$

kennt.

47.) Durch die expliziten Formeln für die Matrizen

$$P\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix} \right.\right)$$

ist auch theoretisch die Aufgabe gelöst, alle Näherungsmatrizen

$$A\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix} \right.\right)$$

nach einander zu bestimmen. Man kennt die Matrix

$$A(z \mid 0, 0, \ldots, 0) = E.$$

Sind ferner die Matrix

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

und die Funktionen

$$R_h(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) \qquad (h = 1, 2, \ldots, m)$$

bekannt, so lässt sich nach den bisherigen Entwicklungen die Matrix

$$P\left(z \left| \begin{matrix} \rho_1+1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \\ \rho_1, & \rho_2, & \ldots, & \rho_m \end{matrix} \right.\right),$$

aus Symmetriegründen also jede der Matrizen

$$P\left(z\,\middle|\,\begin{matrix}\rho_1+\delta_{k1}, \rho_2+\delta_{k2}, \ldots, \rho_m+\delta_{km}\\ \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_m\end{matrix}\right)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m)$$

bestimmen; damit ergeben sich aber auch die neuen Matrizen

$$A(z \mid \rho_1+\delta_{k1}, \rho_2+\delta_{k2}, \ldots, \rho_m+\delta_{km})$$
$$(k = 1, 2, \ldots, m)$$

und die Funktionen

$$R_h(z \mid \rho_1+\delta_{k1}, \rho_2+\delta_{k2}, \ldots, \rho_m+\delta_{km})$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Man kann also schrittweise die Matrix

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

für immer neue und zwar für alle überhaupt denkbaren Parametersysteme

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$$

bestimmen, indem man jedesmal genau einen der Parameter um Eins vermehrt.

Sind aber erst einmal die Matrizen

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)$$

gefunden, so liefert die Formel

$$A(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m)\mathfrak{A}'(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m) = \psi_\sigma(z)E$$

auch die Matrizen

$$\mathfrak{A}(z \mid \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m).$$

Praktisch ist das Verfahren allerdings nur schwierig durchführbar.

REFERENCES

Coates, J.
K. Nederl. Ak. Wetensch., Ser. A., Vol. 69, 421-461 (1966).

Hermite, Ch.
Oeuvres, tome III, 146-149. (1873a)
Oeuvres, tome III, 150-181 (1873b).
Oeuvres, tome IV, 357-377 (1893).

Jager, H.
K. Nederl. Ak. Wetensch., Ser. A, Vol. 67, 192-249 (1964).

MAHLER, K.
Math. Annalen, **105**, 267-276 (1931).
J. reine angew. Math., **166**, 118-150 (1932)

SHIDLOVSKI, A. B.
Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. mat., **23**, 35-66 (1959)
Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. mat., **26**, 877-910 (1962).

(Oblatum 1-9-'66)