KÜLÖNLENYOMAT

MATEMATIKAI LAPOK

22. ÉVFOLYAM 1–2. SZÁMÁBÓL

Kurt Mahler

Transcendens számok. I.

BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT BUDAPEST, 1971

TRANSZCENDENS SZÁMOK EGZISZTENCIÁJA ÉS FŐBB TULAJDONSÁGAI* I.

KURT MAHLER

1. Azok a számok, melyekkel a továbbiak során foglalkozni fogunk valósak vagy képzetesek és feladatunk annak eldöntése, hogy a szóban forgó számok algebraiak vagy transzcendensek-e.

A ξ számot *algebrai szám*nak nevezünk, ha létezik legalább egy, racionális együtthatós

$$a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m=0 \quad (m\geqq 1,\, a_m\neq 0)$$

egyenlet, melyet ξ kielégít. Mivel az együtthatók beszorozhatók a nevezők legkisebb közös többszörösével, ξ eleget tesz egy olyan egész együtthatós egyenletnek is, melynek együtthatói relatív prímek. Ha ξ nem tesz eleget ilyen algebrai egyenletnek, akkor *transzcendens*nek nevezzük.

Könnyen bizonyíthatjuk, hogy algebrai számok léteznek. Legyenek p, q és $r\neq 0$ tetszőleges számok. Ekkor a $\varrho=p/r$ racionális szám kielégíti az $rx-p=0$ lineáris egyenletet és a $\sigma=(p+qi)/r$ komplex szám eleget tesz az $r^2x^2-2prx+p^2+q^2=0$ másodfokú egyenletnek. Így ϱ és σ algebrai számok. Nyilvánvaló, hogy az összes ilyen ϱ sűrű halmazt alkot a számegyenesen és a σ-k halmaza is sűrű a komplex síkon. Ebből következik, hogy a valós algebrai számok sűrű halmazt alkotnak a számegyenesen és a komplex algebrai számok halmaza mindenütt sűrű a komplex síkon.

Ismeretes, hogy az algebrai számok halmaza, A egy test. Így, ha ξ transzcendens és $\alpha\neq 0$ A valamely eleme, akkor $\alpha\xi$ is transzcendens. Ezért, ha létezik legalább egy valós transzcendens szám, akkor a valós transzcendens számok sűrűn helyezkednek el a valós egyenesen és ha legalább egy komplex transzcendens szám létezik, akkor a komplex transzcendens számok halmaza sűrűn helyezkedik el a komplex síkon.

1844-ben J. Liouville bizonyította először azt a nem nyilvánvaló tényt, hogy léteznek transzcendens számok. Módszerét jelen fejezet során később ismertetjük, egyéb összefüggéseivel kapcsolatban. Először a jóval egyszerűbb G. Cantor-féle egzisztencia bizonyítást (1874) tárgyaljuk.

2. A továbbiak során a következő jelöléseket használjuk:

Legyen $a(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ tetszőleges, valós vagy komplex együtthatós polinom. A

$$H(a)=\max\,(|a_0|,|a_1|,\ldots,|a_m|) \quad \text{és} \quad L(a)=|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_m|$$

* Jelen cikk Kurt Mahlernek, a transzcendens számok elmélete kiváló kutatójának előadásaiból a bevezető részt tartalmazza. A közlést ezen elmélet iránti megélénkült érdeklődés indokolja, melynek egyik jeleként kapott A. Baker 1970-ben Fields-Medalt idevágó eredményeiért.

mennyiségeket a polinom *magasság*ának és *szélesség*ének nevezzük; mindkettő a polinom együtthatói nagyságának mérésére szolgál. Bár a magasságot gyakrabban használjuk a hosszúság előnye az, hogy tetszőleges $a(x)$ és $b(x)$ polinomok esetén kielégíti az alábbi két egyszerű egyenlőtlenséget:

$$L(a+b) \leqq L(a)+L(b), \quad L(ab) \leqq L(a)L(b). \tag{1}$$

Ha az $a(x)$ fokszáma pontosan m (azaz $a_m \neq 0$), akkor a $\partial(a)=m$ jelölést használjuk. A zérus polinom fokszámára

$$\partial(0)=-\infty$$

jelölést használjuk, ahol a $-\infty$ szimbólum minden véges egésznél kisebbet jelent.

Így érvényesek a

$$\partial(a+b) \leqq \max\big(\partial(a), \partial(b)\big), \quad \partial(ab) = \partial(a)+\partial(b) \tag{2}$$

összefüggések.

Célszerű bevezetni az alábbi jelöléseket is:

$$\Lambda(a)=2^{\partial(a)}L(a), \quad \text{általánosabban} \quad \Lambda_C(a)=C^{\partial(a)}L(a),$$

ahol a második kifejezésben szereplő C, egynél nagyobb valós állandó.

3. Egy $a(x)$ egész együtthatós polinom *primitív* ha együtthatói relatív prímek, ha pedig a_m, a legmagasabb fokú tag együtthatója pozitív, akkor *normált polinom*ról beszélünk. Ugyanezen jelöléseket fogjuk használni a megfelelő $a(x)=0$ algebrai egyenlettel kapcsolatban is.

Legyen ξ egy tetszőleges algebrai szám. Ekkor ξ végtelen sok különböző primitív és normált $a(x)=0$ egyenletnek tesz eleget. Ezen egyenletek között van egy és csak egy legkisebb fokszámú; jelölje ezt

$$A(x|\xi) = A_0+A_1x+\dots+A_Mx^M \quad (A_M>0),$$

ekkor $\partial(A)=M$. $A(x|\xi)$-t ξ *minimálpolinom*jának nevezzük. A minimálpolinom lényeges tulajdonsága, hogy irreducibilis a racionális számtest felett, azaz nem bontható fel két pozitív fokszámú racionális együtthatós polinom szorzatára.

Bevezetjük még a következő jelöléseket: $\partial^0(\xi)=\partial(A)=M$ *ξ fokszáma*, $H^0(\xi)=H(a)$ *ξ magassága*, $L^0(\xi)=L(A)$ *ξ szélessége*. Itt a felső index 0-t azért használjuk, hogy ezeket a mennyiségeket megkülönböztessük a konstans ξ polinom fokszámától, magasságától és szélességétől.

Az $A(x|\xi)=0$ egyenlet M-ed fokú, így M gyöke van:

$$\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \dots, \xi^{(M-1)}. \tag{3}$$

A gyökök egymástól különböző valós vagy komplex számok, és egyikük ξ-vel egyenlő. Tegyük fel, hogy minden esetben

$$\xi=\xi^{(0)}.$$

Az $A(x|\xi)=0$ egyenlet (3)-ban szereplő gyökei *ξ algebrai konjugált*jai.

4. A Cantor-féle bizonyítás lényege az, hogy megmutatja, hogy az összes algebrai számok halmaza, A megszámlálható, a valós számoknak pedig létezik egy nem megszámlálható részhalmaza, jelölje ezt B. A két halmaz különbsége $B-A=$ $=B-(A\cap B)$ nem üres, így B tartalmaz olyan elemet ami nincs A-ban, tehát transzcendens.

Egyszerűen belátható az, hogy A megszámlálható. Jelölje $\mathscr{A}$ a különböző irreducibilis primitív és normált polinomok halmazát. Ezek a polinomok pozitív fokszámúak és egészegyütthatósak. A minden eleméhez egyértelműen hozzárendeltünk egy $\mathscr{A}$-beli polinomot és az $\mathscr{A}$-beli polinomok gyökei elemei A-nak.

Minden rögzített páros egész r számra a

$$\Lambda(A)=r$$

egyenletnek véges sok $\mathscr{A}$-beli polinom tesz eleget. Rendezzük sorban az $\mathscr{A}$-beli polinomokat: először tekintsük azokat, melyekre $\Lambda(A)=2$, majd azokat, melyekre $\Lambda(A)=4$, ezeket követi $\Lambda(A)=6$ stb. ... Ily módon $\mathscr{A}$ összes polinomját

$$A_1(x), A_2(x), A_3(x), \ldots$$

sorozatba rendeztük.

Állítsuk sorba előbb $A_1(x)$, majd $A_2(x)$ gyökeit, és így tovább:

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$$

sorozat tartalmazza A minden elemét, így A megszámlálható.

Természetesen nemcsak A, hanem tetszőleges részhalmaza is megszámlálható. Így megszámlálható a valós algebrai számok halmaza, a $[0, 1]$ intervallum valós algebrai számainak halmaza, a $|z|<1$ komplex egységkör komplex algebrai számainak halmaza.

5. Jelölje B azon ξ valós számok halmazát, melyek előállíthatók

$$\xi = \cfrac{0+1}{g_1+\cfrac{1}{g_2+\cfrac{1}{g_3+\cfrac{1}{\ddots}}}} = [0, g_1, g_2, g_3, \ldots]$$

végtelen lánctört alakban, ahol a $g_1, g_2, g_3, \ldots$ számok csak az 1 vagy 2 értéket veszik fel. B a $[0, 1]$ intervallum összes irracionális számainak egy részhalmaza.

Állítjuk, hogy B *nem megszámlálható halmaz.* Ellenkező esetben B elemei egy $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ sorozatba rendezhetők lennének, ahol ξ_r egy lánctört:

$$\xi_r=[0, g_1^{(r)}, g_2^{(r)}, \ldots] \qquad (r=1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

Ekkor az

$$\eta = [0, 3-g_1^{(1)}, 3-g_2^{(2)}, \ldots]$$

lánctört B-nek eleme. η különbözik B minden elemétől, tehát ellentmondásra jutottunk.

B nem megszámlálható, a 4. elején tett megjegyzés szerint *B tartalmaz transzcendens számokat.* Ennél jóval több is igaz: nevezetesen B összes transzcendens elemét tartalmazó $B-A$ halmaz *nem megszámlálható,* mivel $B=(A\cap B)\cup(B-A)$ ahol $A\cap B$ megszámlálható.

Shibata 1929-ben bebizonyította, hogy minden B halmazbeli ξ-re

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right| \geqq \frac{1}{\sqrt{12q^2}}$$

tetszőleges p és $q(>0)$ egészekre. Alkalmazva ezt az eredményt B transzcendens elemeire; látjuk, hogy vannak racionális számokkal rosszul approximálható transzcendens számok. A későbbiekben szerepelnek majd olyan transzcendens számok is, melyek racionális számokkal igen jól közelíthetők.

Eredményünkből csupán az következik, hogy léteznek transzcendens elemei B-nek. Maillet 1906-ban megjelent könyvében megad egy konstrukciót a B halmaz transzcendens elemeire, bizonyítása azonban igen bonyolult.

Mivel *valós* transzcendens számok léteznek, az 1.-ban tett megjegyzés szerint *nem-valós komplex* transzcendens számok is léteznek. Így a komplex transzcendens számok halmaza *nem* megszámlálható.

6. Miután beláttuk, hogy transzcendens számok léteznek, egyszerű szükséges és elégséges feltételt keresünk annak eldöntésére, hogy egy szám transzcendens-e. Mielőtt erre rátérünk, a polinomok és kvadratikus alakok néhány, önmagában is érdekes tulajdonságával fogunk foglalkozni.

Legyen

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

tetszőleges komplex együtthatós polinom. Az előzőekben már bevezettük a $\partial(a)$ fokszámot, a $H(a)$ magasságot és az $L(a)$ szélességet, továbbá az $\Lambda(a)$ és $\Lambda_C(a)$ kifejezéseket, és megjegyeztük, hogy $L(a)$ rendelkezik az (1) tulajdonsággal.

Célszerű még bevezetni $a(x)$ együtthatóinak következő függvényét:

$$M(a) = \exp\Big(\int_0^1 \log |a(e^{2\pi i t})|\, dt\Big) > 0 \quad \text{ha} \quad a(x) \not\equiv 0$$

és $M(0)=0$ ha $a(x)\equiv 0$. $M(a)$-t $a(x)$ *mértékének* nevezzük; a konstans polinom esetén $M(a)$ megegyezik a közönséges abszolút értékkel.

A definíció azonnali következményeként $M(a)$ multiplikatív:

$$M(ab) = M(a)M(b). \tag{5}$$

$a(x)$ zérushelyei segítségével egy egyszerűbb előállítás adható $M(a)$-ra, mely a jólismert Jensen-formula speciális esete. A továbbiakban egy ettől független bizonyítást adunk erre az előállításra.

7. Legyen $r \geqq 0$ és τ tetszőleges valós szám. Vizsgáljuk az $x - re^{2\pi i\tau}$ lineáris polinom mértékét:

$$M(x - re^{2\pi i\tau}) = \exp\Big(\int_0^1 \log |e^{2\pi i t} - re^{2\pi i\tau}|\, dt\Big) = \exp\Big(\int_0^1 \log |e^{2\pi i(t-\tau)} - r|\, dt\Big).$$

Az integrandus t-ben periodikus függvény, periódushosszúsága 1, ha tehát $t-\tau = s$-t helyettesítünk az integrálba, a következő összefüggést kapjuk:

$$M(x - re^{2\pi i\tau}) = \exp\Big(\int_0^1 \log |e^{2\pi i s} - r|\, ds\Big) = M(x-r).$$

Tehát

$$M(x-\alpha) = M(x-|\alpha|) \tag{6}$$

minden α komplex számra. Így tetszőleges pozitív egész n-re:

$$\{M(x-\alpha)\}^n = \prod_{k=0}^{n-1} M(x-\alpha e^{2\pi ik/n}) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 \log|e^{2\pi it}-\alpha e^{2\pi ik/n}|\,dt\right) =$$

$$= \exp\left(\int_0^1 \log|e^{2\pi int}-\alpha^n|\,dt\right).$$

Helyettesítsünk a fenti képletbe $nt=u$-t, ekkor:

$$\{M(x-\alpha)\}^n = \exp\left(\int_0^n \log|e^{2\pi iu}-\alpha^n|\,\frac{du}{n}\right) = \exp\left(\int_0^1 \log|e^{2\pi iu}-\alpha^n|\,du\right).$$

Így

(7) $$M(x-\alpha) = M(x-\alpha^n)^{1/n},$$

ahol az n-edik gyök pozitív értékét tekintjük. (6)-t és (7)-t alkalmazva ($n \geqq 2$ helyettesítéssel) azonnal látható, hogy

(a) $$M(x-\alpha) = 1 \quad \text{ha} \quad |\alpha|=1.$$

Tegyük fel most, hogy $|\alpha|<1$ és válasszuk n-t olyan nagyra, hogy

$$\tfrac{1}{2} \leqq 1-|\alpha|^n \leqq |e^{2\pi it}-\alpha^n| \leqq |1|+|\alpha|^n \leqq 2,$$

ekkor

$$\tfrac{1}{2} \leqq M(x-\alpha^n) \leqq 2.$$

Ismét (7)-t alkalmazva és n-nel végtelenhez tartva következik, hogy

(b) $$M(x-\alpha) = 1 \quad \text{ha} \quad |\alpha|<1.$$

Végül legyen $|\alpha|>1$, ekkor

$$M(x-\alpha^n) = \exp\left(\int_0^1 \log|e^{2\pi it}-\alpha^n|\,dt\right) = |\alpha|^n \exp\left(\int_0^1 \log|1-\alpha^{-n}e^{2\pi it}|\,dt\right).$$

Ha n tart a végtelenhez, akkor $\log|1-\alpha^{-n}e^{2\pi it}|$ t-ben egyenletesen tart 0-hoz, így

$$\lim_{n\to\infty} |\alpha|^{-n} M(x-\alpha^n) = 1.$$

A (7) képletet alkalmazva kapjuk, hogy

(c) $$M(x-\alpha) = |\alpha| \quad \text{ha} \quad |\alpha|>1.$$

(a), (b), (c) formulák az alábbi képletbe foglalhatók:

$$M(x-\alpha) = \max(1, |\alpha|).$$

Az $M(a)$-ra vonatkozó (5) szorzási formula a következő egyszerű eredményre vezet:

3*

Ha $a(x)=a_0+a_1x+\dots+a_mx^m$ *zérushelyei* $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$, *azaz*

$$a(x)=a_m\prod_{j=0}^{m-1}(x-\alpha_j),$$

akkor

$$M(a)=|a_m|\prod_{k=0}^{m-1}\max(1,|\alpha_k|). \tag{8}$$

8. Mivel

$$|a(e^{2\pi it})|=|a_0+a_1e^{2\pi it}+\dots+a_me^{2\pi imt}|\leqq|a_0|+|a_1|+\dots+|a_m|=L(a),$$

$M(a)$-ra teljesül az

$$M(a)\leqq L(a) \tag{9}$$

egyenlőtlenség. $M(a)$-ra adható, egy a fentihez hasonló, de kevésbé nyilánvaló alsó becslés.

Az $a(x)$ polinom a_k együtthatója

$$a_k=(-1)^{m-k}a_m\sigma_{m-k}$$

alakban írható, ahol σ_{m-k} az $(m-k)$-adik *elemi szimmetrikus függvény*, azaz $\binom{m}{m-k}=\binom{m}{k}$ számú $\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\dots\alpha_{j_{m-k}}$ szorzat összege, ahol $j_1, j_2, \dots, j_{m-k}$ páronként különböző elemei a $0, 1, \dots, m-1$ elemekből álló halmaznak. Következésképpen

$$|a_k|\leqq\binom{m}{k}M(a), \tag{10}$$

mivel

$$|a_m\alpha_{j_1}\alpha_{j_2}\dots\alpha_{j_{m-k}}|\leqq M(a).$$

A (10) formula $k=0$ és $k=m$ esetén is fennáll. Felhasználva, hogy $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}=2^k$, (10)-t k szerint összegezve ($k=0, 1, \dots, m$) kapjuk, hogy

$$L(a)\leqq 2^{\partial(a)}M(a). \tag{11}$$

Végül a szorzásra vonatkozó (5) egyenlőségből, a (9) és (10) egyenlőtlenségekből következik, hogy

$$L(a)\,L(b)\leqq 2^{\partial(a)}\,M(a)\,2^{\partial(b)}\,M(b)\leqq 2^{\partial(ab)}\,M(ab)\leqq 2^{\partial(ab)}\,L(ab)$$

azaz

$$L(ab)\geqq 2^{-\partial(ab)}L(a)L(b). \tag{12}$$

A magasságra vonatkozó

$$H(ab)\geqq e^{-\partial(ab)}H(a)H(b)$$

(12)-höz hasonló egyenlőtlenség Gelfondtól (1952) származik.

9. Legyen ξ valós vagy komplex algebrai szám és 3.-ban definiált minimálpolinomja legyen:

$$A(x|\xi)=A_0+A_1x+\dots+A_Mx^M.$$

Tekintsünk egy tetszőleges másik $a(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ $(a_m\neq 0)$ egészegyütthatós polinomot. Definíció szerint $A(\xi|\xi)=0$, továbbá $A(x|\xi)$ irreducibilis. Következésképpen $a(\xi)$ csak akkor 0, ha $A(x|\xi)$ osztója $a(x)$-nek. Fordítva, ha $a(\xi)$ nem tűnik el, akkor $a(x)$ nem osztható $A(x|\xi)$-vel, tehát

$$a(\xi^{(j)})\neq 0 \qquad (j=0,1,\ldots,M-1),$$

ahol $\xi^{(0)}=\xi,\ \xi^{(1)},\ldots,\xi^{(M-1)}$ ξ algebrai konjugáltjai. Tegyük fel most, hogy ezek az egyenlőtlenségek fennállnak.

$A(x|\xi)$ és $a(x)$ rezultánsa

$$R=R(A,a)=A_M^m\,a(\xi^{(0)})\,a(\xi^{(1)})\ldots a(\xi^{(M-1)})$$

zérótól különböző szám lesz. Determináns alakjában felírva

$$R=\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \ldots & A_M & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & A_0 & A_1 & \ldots & A_M\\ a_0 & a_1 & \ldots & a_m & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & \ldots & a_m \end{vmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m \text{ sor}\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} M \text{ sor}\end{matrix}$$

tehát R egy 0-tól különböző egész szám. Így $|R|\geqq 1$. Az

$$|a(\xi^{(j)})| = |a_0+a_1\xi^{(j)}+\cdots+a_m\xi^{(j)\,m}|\leqq L(a)\max(1,|\xi^{(j)}|)^m$$

triviális becslésből rögtön következik, hogy

$$\text{(d)}\qquad 1\leqq |R|\leqq |A_M|^m|a(\xi)|\prod_{j=1}^{m-1}\{L(a)\max(1,|\xi^{(j)}|)^m\}=$$
$$=|a(\xi)|\,M(A)^m\,L(a)^{M-1}\max(1,|\xi|)^{-m}.$$

Abban az esetben, amikor ξ nem valós, a fentieknél erősebb eredményt kaphatunk. Legyen ekkor mondjuk $\xi^{(1)}=\bar{\xi}$, $\bar{\xi}$ gyöke az $A(x|\xi)=0$ egyenletnek, továbbá

$$|\xi^{(1)}|=|\xi|,\qquad |a(\xi^{(1)})|=|a(\xi)|.$$

Ekkor:

$$\text{(e)}\qquad 1\leqq|R|\leqq|A_M|^m|a(\xi)\,a(\xi^{(1)})|\prod_{j=2}^{M-1}\{L(a)\max(1,|\xi^{(j)}|)^m\}=$$
$$=|a(\xi)|^2\,M(A)^m\,L(a)^{M-2}\max(1,|\xi|)^{-2m}.$$

Vezessük be a következő függvényt:

$$\sigma(\alpha)=\begin{cases}1 & \text{ha } \alpha \text{ valós,}\\ 2 & \text{ha } \alpha \text{ nem valós.}\end{cases}$$

$\sigma(\alpha)$ segítségével a (d) és (e) becslések egy képletbe írhatók:

$$|a(\xi)|\geqq\frac{\max(1,|\xi|)^m}{M(A)^{m/\sigma(\xi)}\,L(A)^{(M/\sigma(\xi))-1}}.$$

Esetünkben

$$m=\partial(a), \quad M=\partial^0(\xi), \quad M(A)\leqq L(A)=L^0(\xi).$$

Ily módon a következő R. Gütingtől (1961) származó tételt kaptuk:

1. Tétel: Tetszőleges ξ algebrai szám és $a(x)$ egészegyütthatós polinom esetén vagy

$$a(\xi)=0,$$

vagy

$$|a(\xi)| \geqq \frac{\max(1, |\xi|)^{\partial(a)}}{L^0(\xi)^{\partial(a)/\sigma(\xi)} L(a)^{(\partial^0(\xi)/\sigma(\xi))-1}}.$$

10. Alkalmazzuk tételünket abban az esetben, amikor ξ valós, irracionális szám, ekkor $\partial^0(\xi)\geqq 2$ és $\sigma(\xi)=1$, és legyen $a(x) = p-qx$, ahol p és $q>0$ egészek. Ekkor $a(\xi)\neq 0$. Mivel $L(a) = |p|+q$ a tétel következménye:

$$|p-q\xi| \geqq \frac{\max(1, |\xi|)}{L^0(\xi)(|p|+q)^{\partial^0(\xi)-1}}$$

azaz

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right| \geqq \frac{\max(1, |\xi|)}{L^0(\xi)\left(1+\dfrac{|p|}{q}\right)^{\partial^0(\xi)-1}} q^{-\partial^0(\xi)}.$$

Ennek megfelelően

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right| \geqq \frac{\max(1, |\xi|)}{L^0(\xi)|\xi|^{\partial^0(\xi)-1}} q^{-\partial^0(\xi)} \quad \text{vagy} \quad \left|\xi-\frac{p}{q}\right| \geqq 1 \geqq q^{-\partial^0(\xi)}$$

aszerint, hogy $\left|\xi-\frac{p}{q}\right| < 1$ és ezért $1+\frac{|p|}{q} > |\xi|$ vagy $\left|\xi-\frac{p}{q}\right| \geqq 1$. Vezessük be a csak ξ-től függő

$$\gamma(\xi) = \min\left(1, \frac{\max(1, |\xi|)}{L^0(\xi)|\xi|^{\partial^0(\xi)-1}}\right)$$

állandót. Ezt felhasználva a következő eredményt kaptuk:

(13) *Bármely ξ valós irracionális algebrai számra* $\left|\xi-\frac{p}{p}\right| \geqq \gamma(\xi)q^{-\partial^0(\xi)}$ *minden p és $q(>0)$ egész számra.*

Ezt a tételt Liouville (1844) bizonyította, de $\gamma(\xi)$-re más becslést adott. Ebből kiindulva mutatott példát először konkrét transzcendens számra.

Liouville tételének következménye a transzcendentalitás egy elégséges (de *nem* szükséges) feltétele.

14) *Legyen ξ valós szám. Ha létezik a valós számoknak egy végtelenhez tartó ω_1, ω_2, … sorozata, és racionális számoknak $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$, … sorozata, melyekre $q_r\geqq 2$,*

$$0<\left|\xi-\frac{p_r}{q_r}\right| \leqq q_r^{-\omega_r} \qquad (r=1, 2, 3, \dots)$$

teljesül, akkor ξ transzcendens.

Más szóval, ha ξ „túl jó" approximálható recionális számokkal, akkor nem lehet algebrai.

A (14) tulujdonsággal rendelkező számokat *Liouville-számok*nak nevezzük. Könnyen adhatunk példát Liouville-számra. Tekintsük mondjuk a

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n!}$$

számot. Válasszuk p_r-t és q_r-t a következőképpen:

$$p_r = 2^{r!} \sum_{n=1}^{r} 2^{-n!},\ q_r = 2^{r!} \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

Ekkor

$$0 < \xi - \frac{p_r}{q_r} = \sum_{n=r+1}^{\infty} 2^{-n!} \leq 2^{-(r+1)!}(1+2^{-1}+2^{-2}+\ldots) = 2 \cdot 2^{-(r+1)r!},$$

így elég nagy r-re

$$0 < \xi - \frac{p_r}{q_r} < q_r^{-r}.$$

(14) alapján ξ Liouville-szám, így tehát transzcendens.

A módszert általánosítva, Liouville-számok nem megszámlálható részhalmazát kaphatjuk. Ennek ellenére, az összes Liouville-szám halmazának Lebesgue-mértéke zéró.

Az e szám ismert lánctört alakjából (Perron 1929) következik, kogy e nem Liouville-szám, hasonló okból a π szám sem Liouville-féle (Mahler 1932).

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[ne]}{2^n}$ szám, ahol $[x]$ x egész részét jelenti, nem triviális példa Liouville-számra (Böhmer 1927).

11. Liouville (13) eredményét Thue (1908), Siegel (1921), Dyson (1947) és Roth (1955) lényegesen javították. Roth a következő, igen mély, bizonyos értelemben nem javítható tétel bizonyította.

(15) *Ha ξ valós irracionális algebrai szám és $\tau > 2$ adott állandó, akkor létezik $\gamma^*(\xi, \tau) > 0$ állandó, hogy $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \geq \gamma^*(\xi, \tau) q^{-\tau}$ minden p és $q(>0)$ egész számra.*

$\tau = 2$-re az állítást még nem igazolták és valószínűleg nem is igaz.

(15) tételből kaptunk egy újabb elégséges feltételt a transzcendenciára:

(16) *Legyenek ξ és $\tau > 2$ valós számok. Ha létezik különböző racionális számokból álló $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots$ sorozat, melyre*

$$0 < \left|\xi - \frac{p_r}{q_r}\right| \leq q_r^{-\tau} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)$$

akkor ξ transzcendens.

Ez a tétel is jól használható transzcendens számok konstruálására. Segítségével belátható (nem egészen egyszerűen), hogy a

$$0{,}123456789101112\ldots$$

végtelen tizedestört és végtelen sok, ehhez hasonló tizedestört transzcendens. Ezt először közvetlenül Mahler (1937) bizonyította.

Későbbiekben majd bebizonyítjuk, hogy (16) tulajdonsággal rendelkező számok halmazának Lebesgue-mértéke zéró. Jóllehet, ez a számhalmaz nem megszámlálható, hiszen minden Liouville-számot tartalmaz.

12. A transzcendens számoknak van egy másik osztálya, melyet az 1. Tétel segítségével kaphatunk meg.

Legyen $\xi > 1$ olyan algebrai szám, melynek hatványai: $\xi, \xi^2, \xi^3, \ldots$ nem egészek. Tekintsük a következő $a(x)$ polinomokat:

$$a(x) = x^m - [\xi^m] \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Mivel $L(a) = 1 + [\xi^m]$, az 1. Tétel alapján:

$$\xi^m - [\xi^m] \geqq \frac{\max(1, \xi)^m}{L^0(\xi)^m (1 + [\xi^m])^{\partial^0(\xi)+1}} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Így létezik egy ξ-től függő, $C(\xi) > 0$ állandó, hogy

(17) $$\xi^m - [\xi^m] \geqq C(\xi)^{-m} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

A következő példa mutatja, hogy ez az egyenlőtlenség már nem javítható. $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ esetén könnyen ellenőrizhető, hogy minden m természetes számra

$$[\xi^m] = \begin{cases} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m & \text{ha } m \text{ páratlan}, \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m - 1 & \text{ha } m \text{ páros}, \end{cases}$$

ennek megfelelően

$$\xi^m - [\xi^m] = \begin{cases} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-m} & \text{ha } m \text{ páratlan}, \\ 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-m} & \text{ha } m \text{ páros}. \end{cases}$$

(17) egyenlőtlenség esetünkben fennáll $C(\xi) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ állandóval, és minden páratlan m-re pontos egyenlőség teljesül.

(17)-ből egy szám transzcendenciájára a következő elégséges feltételt nyerjük:

(18) *Legyen a $\xi > 1$ olyan szám, melynek hatványai $\xi, \xi^2, \xi^3, \ldots$ nem egészek. Ha*

$$\liminf_{m \to \infty} \{\xi^m - [\xi^m]\}^{1/m} = 0$$

akkor ξ transzcendens.

Ha ξ rendelkezik a fenti tulajdonsággal és valamely $C > 1$ állandóval a

$$0 < \xi^m - [\xi^m] \leqq C^{-m}$$

egyenlőtlenség végtelen sok pozitív egész m-re teljesül, akkor (17) alapján ξ nem lehet algebrai.

Nehéznek látszik annak eldöntése, hogy a (18)-ban szereplő feltétel a transzcendencia szükséges feltétele vagy sem.

Példát mutatunk (18)-s tulajdonsággal rendelkező számra. Definiálunk egy $g_1, g_2, \ldots$ sorozatot: $g_1=1$, $g_{r+1} = g_r^{r+1}+1$ $(r=1, 2, \ldots)$. Ekkor

$$\xi_r = g_r^{1/r!} \qquad (r=1, 2, \ldots)$$

választással nyilvánvaló, hogy

(19) $$\xi_1<\xi_2<\xi_3<\cdots$$

Azt állítjuk, hogy

(20) $$g_r \leqq 2^{r!-(r-1)!} \qquad (r=1, 2, \ldots).$$

Ez a formula $r=1$ esetén igaz; tegyük fel, hogy beláttuk, hogy valamely rögzített $r\geqq 1$ számra már bizonyítottuk. Ekkor

$$g_{r+1} \leqq 2^{(r+1)\{r!-(r-1)!\}}+1 = 2^{(r+1)!-r!-(r-1)!}+1 \leqq 2^{(r+1)!-r!}$$

mivel

$$(r+1)!-r!-(r-1)! \geqq 0, \quad \text{és} \quad (r-1)! \geqq 1.$$

A formula teljesül $(r+1)$-re is, tehát (20) igaz minden r-re.

(20) alapján $\xi_r<2$ $(r=1, 2, \ldots)$. Ekkor, felhasználva (19)-t, létezik a $\xi = \lim\limits_{r\to\infty} \xi_r$, továbbá

$$\xi_r<\xi\leqq 2 \qquad (r=1, 2, \ldots).$$

Mivel $\xi_2=\sqrt{2}$

$$\xi_r>\sqrt{2} \quad \text{és} \quad g_r>2^{\frac{1}{2}r!} \quad \text{ha} \quad r\geqq 3.$$

Következésképpen:

$$g_{r+1}<g_r^{r+1}\{1+2^{-\frac{1}{2}(r+1)!}\}, \quad \xi_{r+1}<\xi_r\{1+2^{-\frac{1}{2}(r+1)!}\}^{\frac{1}{(r+1)!}}$$

és így

$$0<\xi_{r+1}-\xi_r<\xi_r\{(1+2^{-\frac{1}{2}(r+1)!})-1\}.$$

A differenciálszámítás középértéktétele szerint tetszőleges $0<\lambda<1$ és $x>0$ számok esetén létezik egy ϑ szám, $0<\vartheta<1$, hogy

$$(1+x)^\lambda = 1+\lambda x(1+\vartheta x)^{\lambda-1}\leqq 1+\lambda x.$$

Így, ha $r\geqq 3$, akkor

$$0<\xi_{r+1}-\xi_r<\xi_r\frac{2^{-\frac{1}{2}(r+1)!}}{(r+1)!}\leqq\frac{2^{1-\frac{1}{2}(r+1)!}}{(r+1)!},$$

és ezért

$$0<\xi-\xi_r = \sum_{\varrho=r}^{\infty}(\xi_{\varrho+1}-\xi_\varrho)\leqq\sum_{\varrho=r}^{\infty}\frac{2^{1-\frac{1}{2}(\varrho+1)!}}{(\varrho+1)!}<\frac{2^{2-\frac{1}{2}(r+1)!}}{(r+1)!}.$$

Egy további következmény, hogy elég nagy r-re:

$$0<\xi^{r!}-g_r = \xi^{r!}-\xi_r^{r!} = (\xi-\xi_r)\sum_{\varrho=0}^{r!-1}\xi^\varrho\xi_r^{r!-\varrho-1}\leqq$$

$$\leqq(\xi-\xi_r)r!\,\xi^{r!-1}\leqq\frac{2^{2-\frac{1}{2}(r+1)!}}{(r+1)!}r!\,2^{r!}\leqq 2^{-\frac{1}{3}(r+1)!}.$$

Így ha r elég nagy, az is teljesül hogy

$$[\xi^{r!}] = g_r$$

és

$$0 < \xi^{r!} - [\xi^{r!}] < 2^{-\frac{1}{3}(r+1)!} < 1.$$

Ebből két dolog következik, egyrészt ξ-nek nincs olyan hatványa mely egy egész számmal megegyezik, másrészt

$$0 \leqq \liminf_{m\to\infty} \{\xi^m - [\xi^m]\}^{\frac{1}{m}} \leqq \liminf_{r\to\infty} \{\xi^{r!} - [\xi^{r!}]\}^{\frac{1}{r!}} \leqq \lim_{r\to\infty} 2^{-\frac{r+1}{3}} = 0.$$

Ezért ξ rendelkezik a (18) tulajdonsággal, tehát transzcendens.

ξ definícióját kissé megváltoztatva, (18)-s tulajdonságú számok nem megszámlálható halmazát konstruálhatjuk meg. Nem ismert, hogy e vagy π ilyen tulajdonságúak-e, bár mindkét esetben valószínűbb a nemleges válasz.

13. Az 1. Tétel egészegyütthatós polinomok algebrai számokon felvett értékével foglalkozik. Legyen ξ transzcendens, vagy elég nagy fokszámú algebrai szám, mondjuk $\partial^0(\xi) > m$. Ekkor ha

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$

nem azonosan zéró, egészegyütthatós, legfeljebb m-edfokú polinom, akkor

$$a(\xi) \neq 0.$$

Megmutatjuk, hogy az $a(x)$ polinom megválasztható úgy, hogy $|a(\xi)|$ tetszőleges kicsi legyen kivéve azt a triviális esetet, mikor ξ nem valós és $m=1$.

Ilyen polinomok konstruálására több módszer ismeretes. A legismertebb, Dirichlettől származik és az általa bevezetett skatulya-elven alapszik. Azonban számunkra megfelelőbb Hermite módszere, mely pozitív definit kvadratikus alakok minimumbecslésén múlik. Hermite eredeti becslései meglehetősen gyengék voltak, ezeket később mások — többek között Minkowski (1910) és Bichfeldt (1917) — lényegesen javították. Mi itt megelégszünk egy igen egyszerű becsléssel, amely egyébként triviálisan következik Minkowski lineáris alakokra vonatkozó tételéből.

14. A most következő tétel Minkowski klasszikus, lineáris alakokra vonatkozó tétele (1910).

(19) *Legyenek*

$$l_h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} l_{hk} x_k \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

n változós lineáris alakok, determinánsuk:

$$d = \begin{vmatrix} l_{11} & \ldots & l_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & \ldots & l_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Legyenek továbbá $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ pozitív számok;

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \geqq |d|.$$

Ekkor léteznek $x_1^0, \ldots, x_n^0$ egészek — melyek nem mindegyike nulla — hogy

$$|l_h(x_1^0, \ldots, x_n^0)| \leqq \lambda_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, n).$$

Alkalmazzuk ezt a tételt az

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} F_{hk} x_h x_k$$

valós együtthatós kvadratikus alakra. Feltesszük, hogy

$$F_{hk} = F_{kh}$$

és $F(x_1, \dots, x_n)$ pozitív definit, azaz $F(x_1, \dots, x_n) > 0$ minden $x_1, \dots, x_n$ — $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq 0$ — valós értékrendszerre. Pozitív definit kvadratikus alak diszkriminánsa

$$D_F = \begin{vmatrix} F_{11} & \dots & F_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n1} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

mindig pozitív. Egy kvadratikus alak végtelen sokféleképpen írható fel n számú valós, n változós lineáris alak négyzetének összegeként:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h=1}^{n} l_h(x_1, \dots, x_n)^2.$$

Legyen a lineáris alakok determinánsa d, ekkor

$$D_F = d^2.$$

Minkowski tételében (19) legyen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = |d|^{\frac{1}{n}} = D_F^{\frac{2}{n}}.$$

Ekkor léteznek $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ egész számok, hogy

$$|l_h(x_1^0, \dots, x_n^0)|^2 \leq D_F^{1/n} \qquad (h = 1, 2, \dots, n).$$

Így a következő eredményt nyertük:

(20) *Ha $F(x_1, \dots, x_n)$ egy n változós pozitív definit kvadratikus alak, D_F diszkriminánssal, akkor léteznek $x_1^0, \dots, x_n^0$ egész számok, melyek nem mindegyike zéró, hogy*

$$F(x_1^0, \dots, x_n^0) \leq n D_F^{1/n}.$$

15. Alkalmazzuk ezt a tételt az

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{h=1}^{p} (f_{h1}x_1 + \dots + f_{hn}x_n)^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$$

speciális kvadratikus alakra, ahol f_{hk} tetszőleges valós szám és p tetszőleges pozitív egész. A továbbiakban a $\sum_{h=1}^{p}$ jelet egyszerűen $\sum$-val helyettesítjük. Az előbbi kvadratikus alak diszkriminánsa

$$D_F = \begin{vmatrix} \sum f_{h1}f_{h1} + 1 & \sum f_{h1}f_{h2} & \dots & \sum f_{h1}f_{hn} \\ \sum f_{h2}f_{h1} & \sum f_{h2}f_{h2} + 1 & \dots & \sum f_{h1}f_{hn} \\ \vdots & \vdots & & \\ \sum f_{hn}f_{h1} & \sum f_{hn}f_{h2} & \dots & \sum f_{hn}f_{hn} + 1 \end{vmatrix}$$

felírható mint 2^n különböző determináns összege, hiszen D_F minden sora

$$\sum f_{hk}f_{h1}\dots\sum f_{hk}f_{hk}+1\dots\sum f_{hk}f_{hn}$$

a

$$\sum f_{hk}f_{h1}\dots\sum f_{hk}f_{hk}\dots\sum f_{hk}f_{hn}$$

és a $0\dots1\dots0$ — ahol 1 a k-adik helyen áll — sorok összege.

A felbontás segítségével D_F a következő alakban írható:

$$D_F=1+\sum_{k=1}^{n}\Delta_k+\sum_{1\leqq k_1<k_2\leqq n}\Delta_{k_1k_2}+\dots+\Delta_{12\dots n},$$

ahol minden rögzített ν-re $1\leqq\nu\leqq n$,

$$\Delta_{k_1k_2\dots k_\nu}=\begin{vmatrix}\sum f_{hk_1}f_{hk_1} & \sum f_{hk_1}f_{hk_2}\dots & \sum f_{hk_1}f_{hk_\nu}\\ \sum f_{hk_2}f_{hk_1} & \sum f_{hk_2}f_{hk_2}\dots & \sum f_{hk_2}f_{hk_\nu}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \sum f_{hk_\nu}f_{hk_1} & \sum f_{hk_\nu}f_{hk_2}\dots & \sum f_{hk_\nu}f_{hk_\nu}\end{vmatrix}.$$

A $\sum$ jelek helyébe $\sum_{k=1}^{p}$-t írva, $\Delta_{k_1k_2\dots k_\nu}$ νp determináns összege lesz:

$$\sum_{h_1=1}^{p}\sum_{h_2=1}^{p}\dots\sum_{h_\nu=1}^{p}\begin{vmatrix}f_{h_1k_1}f_{h_1k_1} & f_{h_2k_1}f_{h_2k_2}\dots & f_{h_\nu k_1}f_{h_\nu k_\nu}\\ f_{h_1k_2}f_{h_1k_1} & f_{h_2k_2}f_{h_2k_2}\dots & f_{h_\nu k_2}f_{h_\nu k_\nu}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ f_{h_1k_\nu}f_{h_1k_1} & f_{h_2k_\nu}f_{h_2k_2}\dots & f_{h_\nu k_\nu}f_{h_\nu k_\nu}\end{vmatrix},$$

ami megegyezik a következő determinánssal:

$$\sum_{h_1=1}^{p}\sum_{h_2=1}^{p}\dots\sum_{h_\nu=1}^{p}\begin{vmatrix}f_{h_1k_1} & f_{h_2k_1}\dots & f_{h_\nu k_1}\\ f_{h_1k_2} & f_{h_2k_2}\dots & f_{h_\nu k_2}\\ \vdots & \vdots & \\ f_{h_1k_\nu} & f_{h_2k_\nu}\dots & f_{h_\nu k_\nu}\end{vmatrix}f_{h_1k_1}f_{h_2k_2}\dots f_{h_\nu k_\nu},$$

Ha az előbbi képletben a $k_1, k_2, \dots, k_\nu$ számok közül kettő megegyezik, akkor a determináns értéke nulla, ha pedig k_i-t és k_j-t felcseréljük — $1\leqq i<j\leqq\nu$ — akkor a determináns értéke előjelet vált. Következésképpen

$$\Delta_{k_1k_2\dots k_\nu}=\sum_{1\leqq h_1<h_2<\dots<h_\nu\leqq p}\begin{vmatrix}f_{h_1k_1} & f_{h_2k_1}\dots & f_{h_\nu k_1}\\ f_{h_1k_2} & f_{h_2k_2}\dots & f_{h_\nu k_2}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ f_{h_1k_\nu} & f_{h_2k_\nu}\dots & f_{h_\nu k_\nu}\end{vmatrix}^2$$

és így D_F diszkrimináns

$$D_F=\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{1\leqq h_1<h_2<\dots<h_\nu\leqq p}\sum_{1\leqq k_1<k_2<\dots<k_\nu\leqq n}\begin{vmatrix}f_{h_1k_1} & \dots & f_{h_\nu k_1}\\ \vdots & & \vdots\\ f_{h_1k_\nu} & \dots & f_{h_\nu k_\nu}\end{vmatrix}\tag{21}$$

alakban írható, ahol a legbelső összeg üres ha $\nu>\min(n,p)$.

Nézzük meg D_F értéket két egyszerű esetben.

$$D_F = 1 + \sum_{k=1}^{n} f_{1k}^2 \quad \text{ha} \quad p = 1. \tag{22}$$

$$D_F = 1 + \sum_{h=1}^{2} \sum_{k=1}^{n} f_{hk}^2 + \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \begin{vmatrix} f_{1k_1} & f_{2k_1} \\ f_{1k_2} & f_{2k_2} \end{vmatrix} \quad \text{ha} \quad p = 2. \tag{23}$$

Az általános képletet (21)-t, a továbbiakban fogjuk majd alkalmazni.

16. Eredményünk első alkalmazásaként, legyen m tetszőleges pozitív egész szám és ξ valós szám, melyre $\partial^0(\xi) > m$. Legyen továbbá s és t két paraméter, melyre

$$s \geqq \max(1, |\xi|)^{-\frac{m}{m+1}}$$

$$t = (m+1)(m+2)^{\frac{1}{2(m+1)}} \max(1, |\xi|)^{\frac{m}{m+1}} s,$$

így

$$t \geqq (m+1)(m+2)^{\frac{1}{2(m+1)}}.$$

Tekintsük az

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_m) = s^{2(m+1)}(x_0 + x_1\xi + \cdots + x_m \xi^m)^2 + x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_m^2$$

kvadratikus alakot. A 15. jelölését használva:

$$n = m+1, \quad p = 1, \quad f_{10} = s^{m+1}, \quad f_{11} = s^{m+1}\xi, \ldots, f_{1m} = s^{m+1}\xi^m.$$

Így (22) segítségével felírhatjuk a diszkriminánst:

$$D_F = 1 + s^{2(m+1)}(1 + \xi^2 + \xi^4 + \cdots + \xi^{2m}) \leqq 1 + s^{2(m+1)}(m+1)\max(1, |\xi|)^{2m}.$$

Az s-re vonatkozó alsó becslést felhasználva nyerjük, hogy

$$D_F \leqq s^{2(m+1)} \max(1, |\xi|)^{2m} + s^{2(m+1)}(m+1)\max(1, |\xi|)^{2m} \leqq$$

$$\leqq s^{2(m+1)}(m+2)\max(1, |\xi|)^{2m}.$$

(20) tételt alkalmazva léteznek $a_0, a_1, \ldots, a_m$ egészek, melyek nem mindegyike zéró, és ha

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m,$$

akkor

$$s^{2(m+1)} a(\xi)^2 + a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 \leqq$$

$$\leqq (m+1) s^2 (m+1)^{\frac{1}{m+1}} \max(1, |\xi|)^{\frac{2m}{m+1}} = \frac{t^2}{m+1}.$$

Mivel $a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 > 0$, és ξ algebrai szám foka m-nél nagyobb, $a(\xi) \neq 0$. Így

$$0 < |a(\xi)| < \frac{(m+1)^{\frac{1}{2}}(m+2)^{\frac{1}{2(m+1)}} \max(1, |\xi|)^{\frac{m}{m+1}}}{s^m}$$

és

$$0 < a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_m^2 < \frac{t^2}{m+1}.$$

Az $|a(\xi)|$-re felírt egyenlőtlenség ekvivalens a

$$0<|a(\xi)|<\frac{(m+1)^{m+\frac{1}{2}}(m+1)^{\frac{1}{2}}\max(1,|\xi|)^m}{t^m}$$

egyenlőtlenséggel, tehát

$$0<|a(\xi)|<\frac{(m+2)^{m+1}\max(1,|\xi|)^m}{t^m}.$$

A Cauchy-formulát alkalmazva nyerjük, hogy

$$L(a)=1\,|a_0|+1\,|a_1|+\cdots+1\,|a_m|\leqq(m+1)^{\frac{1}{2}}(a_0^2+a_1^2+\cdots+a_m^2)^{\frac{1}{2}}$$

következésképpen

$$0<L(a)<t.$$

Ezzel beláttuk a következő eredményt.

(24) *Ha*

$$\sigma(\xi)=1,\quad \partial^0(\xi)>m\quad \textit{és}\quad t\geqq(m+1)(m+2)^{\frac{1}{2(m+1)}},$$

akkor létezik egy egészegyütthatós $a(x)$ polinom, melyre

$$\partial(a)\leqq m,\quad 0<L(a)<t,\quad 0<|a(\xi)|<\frac{(m+2)^{m+1}\max(1,|\xi|)^m}{t^m}.$$

17. A második esetben legyen m 2-nél nagyobb pozitív egész és ξ nem valós komplex szám. Vezessük be az s és t paramétereket

$$s\geqq\max(1,|\xi|)^{-\frac{2m}{m+1}},\quad t=(m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}}\max(1,|\xi|)^{\frac{2m}{m+1}}s,$$

és így

$$t\geqq(m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Az

$$F(x_0,x_1,\ldots,x_m)=s^{m+1}|x_0+x_1\xi+\cdots+x_m\xi^m|^2+x_0^2+x_1^2+\cdots+x_m^2$$

kifejezés egy pozitív definit kvadratikus alak, mivel

$$F(x_0,x_1,\ldots,x_m)=s^{m+1}(x_0\lambda_0+x_1\lambda_1+\cdots+x_m\lambda_m)^2+$$
$$+s^{m+1}(x_0\mu_0+x_1\mu_1+\cdots+x_m\mu_m)^2+x_0^2+x_1^2+\cdots+x_m^2,$$

ahol λ_k és μ_k jelöli $(k=0,1,\ldots,m)$ ξ^k valós és képzetes részét, így

$$\xi^k=\lambda_k+i\mu_k,$$

tehát

$$\lambda_k^2+\mu_k^2=|\xi|^{2k}\quad\text{és}\quad|\lambda_h\mu_k-\lambda_k\mu_h|\leqq|\xi|^{h+k}.$$

$F(x_0,x_1,\ldots,x_m)$-t a 15.-ban szereplő általános képletből

$$n=m+1,\quad p=2,\quad f_{10}=s^{\frac{m+1}{2}}\lambda_0,\ldots,f_{1m}=s^{\frac{m+1}{2}}\lambda_m$$
$$f_{20}=s^{\frac{m+1}{2}}\mu_0,\ldots,f_{2m}=s^{\frac{m+1}{2}}\mu_m$$

esetén kapjuk.

(23) alapján a vizsgált kvadratikus alak diszkriminánsa:

$$D_F = 1 + s^{m+1} \sum_{k=0}^{m} (\lambda_k^2 + \mu_k^2) + s^{2(m+1)} \sum_{0 \leqq k_1 < k_2 \leqq m} (\lambda_{k_1} \mu_{k_2} - \lambda_{k_2} \mu_{k_1})^2.$$

A fenti képletben

$$\sum_{k=0}^{m} (\lambda_k^2 + \mu_k^2) = \sum_{k=0}^{m} |\xi|^{2k} \leqq (m+1) \max (1, |\xi|)^{2m}$$

és

$$\sum_{0 \leqq k_1 < k_2 \leqq m} (\lambda_{k_1} \mu_{k_2} - \lambda_{k_2} \mu_{k_1})^2 < \sum_{k_1=0}^{m} \sum_{k_2=0}^{m} |\xi|^{2(k_1+k_2)} \leqq (m+1)^2 \max (1, |\xi|)^{4m}.$$

s alsó becslését felhasználva

$$D_F \leqq 1 + s^{m+1}(m+1) \max (1, |\xi|)^{2m} + s^{2(m+1)} (m+1)^2 \max (1, |\xi|)^{4m} \leqq$$

$$\leqq s^{2(m+1)} \{1 + (m+1) + (m+1)^2\} \max (1, |\xi|)^{4m} \leqq s^{2(m+1)} (m+2)^2 \max (1, |\xi|)^{4m}$$

adódik. Az előbbi egyenlőtlenséget és (20)-t alkalmazva, léteznek $a_0, a_1, \dots, a_m$ egészek, hogy

$$s^{m+1} |a(\xi)|^2 + a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_m^2 \leqq (m+1) s^2 (m+2)^{\frac{2}{m+1}} \max (1, |\xi|)^{\frac{4m}{m+1}},$$

ahol $a(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$ és

$$a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_m^2 > 0 \quad \text{így} \quad a(\xi) \neq 0.$$

Tehát

$$0 < |a(\xi)| < \frac{(m+1)^{\frac{1}{2}} (m+2)^{\frac{1}{m+1}} \max (1, |\xi|)^{\frac{2m}{m+1}}}{s^{\frac{m-1}{2}}}$$

és

$$0 < a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_m^2 < (m+1)(m+2)^{\frac{2}{m+1}} \max (1, |\xi|)^{\frac{4m}{m+1}} s^2.$$

A valós esethez hasonlóan az első egyenlőtlenség ekvivalens a

$$0 < |a(\xi)| < \frac{(m+1)^{\frac{m}{2}} (m+2)^{\frac{1}{2}} \max (1, |\xi|)^m}{t^{\frac{m-1}{2}}}$$

egyenlőtlenséggel, míg a másodikból

$$0 < L(a) \leqq (m+1)^{\frac{1}{2}} (a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_m^2)^{\frac{1}{2}} <$$

$$< (m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}} \max (1, |\xi|)^{\frac{2m}{m+1}} s = t$$

következik.

Ily módon a következő eredményt nyertük:

(25) *Ha* $\sigma(\xi) = 2, \quad \partial^0(\xi) > m \geqq 2, \quad t \geqq (m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}},$

akkor létezik egy egész együtthatós $a(x)$ polinom, melyre

$$\partial(a) \leqq m, \quad 0 < L(a) < t,$$

$$0 < |a(\xi)| < \frac{(m+2)^{\frac{m+1}{2}} \max(1, |\xi|)^m}{t^{\frac{m-1}{2}}}.$$

(24) és (25) eredményekből kiolvasható a következő, valamivel gyengébb tétel.

2. *Tétel: Legyen ξ valós, vagy komplex szám és m olyan egész, hogy*

$$\sigma(\xi) \leqq m < \partial^0(\xi).$$

Ekkor minden, a

$$t \geqq (m+2)^{1+\frac{1}{m+1}}$$

feltételnek eleget tevő t-hez létezik olyan egészegyütthatós $a(x)$ polinom, melyre

$$\partial(a) \leqq m, \quad 0 < L(a) < t, \quad 0 < |a(\xi)| < \frac{(m+2)^{\frac{m+1}{\sigma(\xi)}} \max(1, |\xi|)^m}{t^{\frac{m+1}{\sigma(\xi)}-1}}.$$

Tartsunk t-vel monoton növekedve végtelenhez. Ebben az esetben az $a(x)$ polinom sem marad változatlan, hiszen $|a(\xi)|$ felső korlátja nullához tart. Mivel t az $L(a)$ felső korlátja, $a(x)$ egészegyütthatós polinomok, *páronként különböző, végtelen sorozatát* kapjuk, úgy hogy $\partial(a) \leqq m$ és

$$0 < |a(\xi)| < \frac{(m+2)^{\frac{m+1}{\sigma(\xi)}} \max(1, |\xi|)^m}{L(a)^{\frac{m+1}{\sigma(\xi)}-1}}.$$

Másrészt ha $\partial^0(\xi) \leqq m$, akkor ez a gondolatmenet nem alkalmazható, és ha t elég nagy, akkor $a(x)$ egy fix polinommá válik, melyre

$$a(x) \not\equiv 0, \quad \text{de} \quad a(\xi) = 0.$$

Természetesen akkor $a(x)$-nek osztója lesz $A(x|\xi)$, ξ minimálpolinomja.

18. Az 1. és 2. Tételek lehetővé teszik, hogy szükséges és elégséges feltételt adjunk a transzcendenciára. Felhasználjuk a korábban bevezetett

$$\Lambda(a) = 2^{\partial(a)} L(a)$$

jelölést.

3. *Tétel: A valós vagy komplex ξ szám akkor és csak akkor transzcendens, ha létezik (i) egészegyütthatós, páronként különböző polinomok*

$$\{a_1(x), a_2(x), \ldots\}$$

végtelen sorozata és (ii) pozitív számok végtelenhez tartó

$$\{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$$

sorozata, úgy hogy

$$0 < |a_r(\xi)| \leqq \Lambda(a_r)^{-\omega_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

A tétel érdekessége az, hogy semmiféle megszorítást nem tartalmaz $\partial(a_r)$-re, az

$a_r(x)$ fokszámára; $\partial(a_r)$ mint r függvénye lehet korlátos vagy nem korlátos, kicsi vagy nagy.

Bizonyítás: Először megmutatjuk, hogy ha ξ rendelkezik a térbeli tulajdonsággal, akkor transzcendens.

Tegyük fel, hogy ez nem igaz. Az 1. Tétel szerint így minden r-re

$$\frac{\max(1, |\xi|)^{\partial(a_r)}}{L^0(\xi)^{\frac{\partial(a_r)}{\sigma(\xi)}} L(a_r)^{\frac{\partial^0(\xi)}{\sigma(\xi)}-1}} \leqq |a_r(\xi)| \leqq \{2^{\partial(a_r)} L(a_r)\}^{-\omega_r}$$

azaz

$$2^{\partial(a_r)} L(a_r) \leqq \max(1, |\xi|)^{-\frac{\partial(a_r)}{\omega_r}} L^0(\xi)^{\frac{\partial(a_r)}{\omega_r \sigma(\xi)}} L(a_r)^{\frac{\partial^0(\xi)-\sigma(\xi)}{\omega_r \sigma(\xi)}}.$$

Nyilván

$$\max(1, |\xi|)^{\frac{\partial(a_r)}{\omega_r \sigma(\xi)}} \leqq 1.$$

Ha r — és így ω_r is — elég nagy, akkor

$$L^0(\xi)^{\frac{\partial(a_r)}{\omega_r \sigma(\xi)}} \leqq 2^{\frac{1}{2}\partial(a_r)}$$

és

$$L(a_r)^{\frac{\partial^0(\xi)-\sigma(\xi)}{\omega_r \sigma(\xi)}} \leqq L(a_r)^{\frac{1}{2}},$$

mivel $L(a_r) \geqq 1$. Ebből következik, hogy elég nagy r-re

$$\Lambda(a_r) \leqq \Lambda(a_r)^{\frac{1}{2}}, \quad \Lambda(a_r) \leqq 1.$$

Másrészt, abból, hogy az a_r polinomok páronként különbözőek $\lim\limits_{r\to\infty} \Lambda(a_r) = +\infty$ adódik. Tehát ellentmondásra jutottunk.

Legyen most ξ egy transzcendens szám. A tételben állított $\{a_r(x)\}$ és $\{\omega_r\}$ sorozatok végtelen sokféleképp konstruálhatók meg. Tekintsük pozitív egész számok végtelenhez tartó

$$\{m_1, m_2, \ldots\}$$

sorozatát, legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges kis pozitív konstans és

$$\{t_1, t_2, \ldots\}$$

pozitív számok olyan sorozata, hogy

$$t_r \geqq (m_r+2)^{1+\varepsilon} \qquad (r = 1, 2, \ldots).$$

Minden rögzített r-re alkalmazzuk a 2. Tételt $m = m_r$ és $t = t_r$ esetén. Ezt csak elég nagy r-re végezhetjük el, hiszen ekkor

$$t_r \geqq (m_r+2)^{1+\varepsilon} \geqq (m_r+2)^{1+\frac{1}{m_r+1}}.$$

Így ha $r \geqq r_0$, akkor létezik egy egészegyütthatós $a_r(x)$ polinom, hogy

$$\partial(a_r) \leqq m_r, \quad 0 < L(a_r) < t,$$

$$0 < |a_r(\xi)| < \frac{(m_r+2)^{\frac{m_r+1}{\sigma(\xi)}} \max(1, |\xi|)^{m_r}}{t_r^{\frac{m_r+1}{\sigma(\xi)}-1}}.$$

Mivel

$$m_r + 2 \leqq t_r^{\frac{1}{1+\varepsilon}}$$

adódik, hogy

$$0 < |a_r(\xi)| < t_r^{\frac{1}{1+\varepsilon}\frac{m_r+1}{\sigma(\xi)} - \left(\frac{m_r+1}{\sigma(\xi)} - 1\right)} \max(1, |\xi|)^{m_r} = t_r^{1 - \frac{\varepsilon(m_r+1)}{(1+\varepsilon)\sigma(\xi)}} \max(1, |\xi|)^{m_r}.$$

m_r és t_r végtelenhez tartanak és

$$t_r \max(1, |\xi|)^{m_r} \leqq t_r^{\frac{\varepsilon(m_r+1)}{2(1+\varepsilon)\sigma(\xi)}}$$

hacsak r elég nagy. Ezért

$$0 < |a_r(\xi)| < t_r^{-\frac{\varepsilon(m_r+1)}{2(1+\varepsilon)\sigma(\xi)}}, \quad \text{ha} \quad r \geqq r_1.$$

Másrészt

$$\Lambda(a_r) = 2^{\partial(a_r)} L(a_r) \leqq 2^{m_r} t_r = t_r^{\lambda_r},$$

ahol

$$\lambda_r = 1 + \frac{m_r \log 2}{\log t_r}.$$

A definícióból következik, hogy

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\lambda_r}{m_r} = 0.$$

Így tehát felírható:

$$t_r^{-\frac{\varepsilon(m_r+1)}{2(1+\varepsilon)\sigma(\xi)}} = \Lambda(a_r)^{-\omega_r},$$

ahonnan

$$\lim_{r \to \infty} \omega_r = +\infty$$

rögtön következik. Ezzel beláttuk, hogy ξ rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

A 3. Tétel igen fontos, hiszen nagyon általános. Konkrét példákon látható, hogy speciális számok transzcendenciájának bizonyítására felhasználható. Általában nem könnyű egy olyan $a_r(x)$ egészegyütthatós polinomsorozatot találni, hogy $|a_r(\xi)|$ megfelelő gyorsasággal konvergáljon nullához. Szerencsére megfelelő szabadsággal rendelkezünk ilyen sorozatok választásában, amint ezt a tétel bizonyítása is mutatja.

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЧИСЛА

К. МАЛЕР

TRANSCENDENTAL NUMBERS

K. MAHLER