LECTURES ON THE READING OF MATHEMATICS IN CHINESE,
given at Ohio State University, Columbus, Ohio, 1972

KURT MAHLER, FAA, FRS

1972

On the Pronounciation.

This seminar is not a course on Chinese, and so it will suffice to make only the most necessary remarks on the pronounciation of Chinese words. We rather shall try to get as quickly as possible at the meaning of the mathematical text.

There are little gramatical difficulties, and what is necessary will be found in the vocabulary.

The pronounciation is that of the present National Language (Kuo Yu) which is essentially the language spoken in Peking, is similar to the former Mandarin, and is quite different from the dialects spoken, say in Shanghai or Canton. The mathematical text is not exactly in the spoken language, but approaches more the much shorter old written language.

I shall use the old Wade Romanisation which is easier for English speaking people, but different from it shall mark the tone by accents.

Most letters are as pronounced in English, e.g. the consonants

f, h, l, m, n, s, w, and y.

One pronounces roughly

p like b, k like g as in guard, t like d, ch like g as in German, and both ts and tz like dz.

However, when the apostrophe ' is added,

p' is like p+h, k' is like k+h, t' is like t+h, ch' is like ch in chain, and both ts' and tz' are like ts+h.

j is like the s in measure.

There are two sh-sounds. sh is as in English, but hs, which occurs only before i and u, is softer and like the ch in the German word ich.

There are five words erh, shih, chih, ch'ih, and jih ending in h; all other words end either in a vowel, in n, or in ng (like in English long).

The word erh is the only one ending in rh; it is pronounced like the English word fur without the f.

The vowel in all six words

shih, chih, ch'ih, jih, tzu, and tz'u

sounds alike; it is short and somewhat between i and ü. The combinations tz and tz' do not occur in any other words, but are replaced by ts and ts'.

There are words with one, two, or three consecutive vowels. Different from English are the vowels ü and e.

ü is just like the ü in German or the u in French words.

e by itself is like the vowel in fur; examples are he, k'e, shen, and sheng. In combination with other vowels e is like the e in English belt.

The other vowels are as follows.

a is as in English farmer; i=ee; o as in English border; ei as in English made; ou as the o in English alone; ai as the i in English life; ao as the ou in English house. In other combinations of vowels one pronounces the parts separately.

All words are short and considered as having one syllable.

Just as in the Scandinavian languages words are distinguished by tones. These will be denoted by accents, as follows.

ˉ denotes a flat and high tone;

ˊ denotes a rising tone;

ˇ denotes a tone which falls and then rises again;

ˋ denotes a falling tone.

Words of the same pronounciation otherwise, but with different tones, usually have different characters and different meaning. Thus, in the text, chèng means POSITIVE and chěng means INTEGER. Different characters with different meanings occasionally have identical pronounciation and tone.

Of the punctuation marks, , is halfways between the English , and .; 。 denotes a full stop and often the end of a section.

Table of characters as they occur in the text.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		令 lìng	為 wéi	一 ī	正 chèng	整 chěng	數 shù	如 jú	以 ǐ	十 shíh
1	進 chìn	法 fǎ	表 piǎo	示 shìh	之 chīh	其 ch'í	中 chūng	每 měi	位 wèi	字 tzù
2	均 chūn	不 pù	等 těng	於 yú	零 líng	設 shè	此 tz'ǔ	種 chǔng	所 sǒ	成 ch'éng
3	集 chí	合 hé	吾 wú	人 jén	熟 shú	知 chīh	級 chí	收 shōu	斂 liěn	者 chě
4	值 chíh	是 shìh	否 fǒu	超 ch'āo	越 yüè	又 yòu	可 k'ě	用 yùng	平 p'íng	常 ch'áng
5	函 hán	相 hsiāng	當 tāng	困 k'ùn	難 nán	問 wèn	題 t'í	作 tsò	未 wèi	能 néng
6	解 chiě	決 chüé	本 pěn	文 wén	將 chiāng	討 t'ǎo	論 lùn	較 chiào	簡 chiěn	單 tān
7	此 tz'ǔ	與 yǚ	有 yǒu	下 hsià	列 liè	關 kuān	係 hsì	證 chèng	明 míng	代 tài
8	且 ch'iě	時 shíh	及 chí	他 t'ā	類 lèi	似 szù	陳 ch'én	述 shù	固 kù	定 tìng
9	任 jèn	何 hé	值 chíh	書 shū	適 shìh	條 t'iáo	件 chièn	目 mù	的 tì	在 tsài
10	產 ch'ǎn	生 shēng	性 hsìng	質 chíh	方 fāng	程 ch'éng	顯 hsiěn	然 ján	長 ch'áng	因 yīn
11	絕 chüé	對 tuèi	後 hòu	假 chiǎ	恒 héng	小 hsiǎo	或 huò	略 lüè	同 t'úng	今 chīn
12	分 fēn	別 pié	屬 shǔ	則 tsē	二 èrh	故 kù	和 hé	自 tzù	得 té	皆 chiē
13										

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13	包 pāo	含 hán	式 shìh	例 lì	析 hsī	意 ì	根 kēn	據 chǜ	義 ì	另 lìng
14	推 t'uēi	出 ch'ū	結 chié	果 kuǒ	理 lǐ	除 ch'ú	特 t'è	殊 shū	情 ch'íng	形 hsíng
15	外 wài	圓 yüán	內 nèi	天 t'iēn	邊 piēn	界 chiè	大 tà	次 tz'ù	原 yüán	始 shǐh
16	多 tō	項 hsiàng	沿 yén	實 shíh	軸 chóu	至 chìh	三 sān	極 chí	易 ì	上 shàng
17	全 ch'üán	部 pù	點 tiěn	造 tsào	密 mì	異 ì	欲 yǜ	系 hsì	算 suàn	曾 ts'éng
18	二 èrh	具 chǜ	冪 mì	鄰 lín	近 chìn	非 fēi	視 shìh	而 érh	乃 nǎi	面 mièn
19	存 ts'ún	使 shǐh	體 t'ǐ	個 kè	奇 ch'í	四 szù	只 chǐh	需 hsǖ	即 chí	乘 ch'éng
20	積 chī	必 pì	僅 chǐn	無 wú	重 chùng	衝 ch'ūng	突 t'ū	但 tàn	總 tsǔng	節 chié
21	五 wǔ	窮 ch'iúng								
22										

① 一 3	② 十 9	人 33	又 45	二 124=180	③ 之 14	下 73	小 115	大 156	三 166
上 169	乃 188	④ 正 4	中 16	不 21	文 63	及 82	方 104	今 109	分 120
内 152	天 153	五 210	⑤ 令 1	以 8	示 13	此 26=40	可 46	用 47	平 48
未 58	本 62	代 79	且 80	他 83	目 97	生 101	包 130	另 139	出 141
外 150	四 195	只 196	必 201	⑥ 如 7	每 17	字 19	合 31	收 37	有 72
列 74	任 90	件 96	在 99	因 109	同 118	自 127	式 132	次 157	多 160
至 165	全 170	而 187	存 190	⑦ 表 12	位 18	均 20	吾 32	否 42	困 53
作 57	決 61	似 85	何 91	直 92	別 121	含 131	形 149	系 177	具 181
近 184	但 207	⑧ 法 11	其 15	於 23	所 28	知 35	函 50	明 78	述 87
固 88	定 89	的 98	性 102	長 108	或 116	和 126	例 133	果 143	界 155
沿 162	易 168	非 185	使 191	奇 194	⑨ 級 36	者 39	是 41	相 51	係 76
書 93	恒 114	則 123	皆 129	恃 146	始 159	面 189	個 193	即 198	重 207
突 206	窮 211	⑩ 問 55	能 59	討 65	時 81	後 112	故 125	得 128	根 136
除 145	殊 147	原 158	造 173	乘 199	⑪ 進 10	設 25	孰 34	值 40	常 49

將 64	陳 86	條 95	産 100	假 113	推 140	理 144	情 148	圓 151	部 171
密 174	異 175	欲 176	(12) 等 22	集 30	超 43	越 44	單 69	程 105	然 107
絕 110	略 117	義 138	結 142	軸 164	極 167	會 179	視 186	無 203	(13) 零 24
當 52	解 60	較 67	與 71	意 135	需 197	(14) 整 5	種 27	適 94	算 178
節 209	(15) 數 6	論 66	質 103	對 111	據 137	實 163	冪 182	鄰 183	衡 205
(16) 積 200	(17) 歛 38	簡 68	邊 154	總 208	(18) 難 54	題 56	關 75	(19) 證 77	類 84
(20) 屬 122	(23) 顯 106	體 193							

Vocabulary, technical terms, and gramatical explanations.

1. 令 lìng order, to order, LET
2. 為 wei to be
3. 一 ī one, a
4. 正 chèng correct, to correct, POSITIVE (負 fù Negative)
5. 整 chěng to put right, uniform, INTEGER
6. 數 shù number
7. 如 jú if, like
8. 以 ǐ by means of
9. 十 shíh ten = 10
10. 進 chìn to enter
11. 法 fǎ method, law

    十進法 shíh chìn fǎ DECIMAL SYSTEM

12. 表 piǎo to express, table, meter
13. 示 shìh to proclaim

    表示 piǎo shìh TO EXPRESS

14. 之 chīh it; like the 's in the English genetive.
15. 其 ch'í it, they, its, theirs (no distinction of gender)
16. 中 chūng middle, in (put after the word it affects).

    其中 in it (i.e. in the representation)

17. 每 měi each, every
18. 位 wèi position, place
19. 字 tzù letter, character, word

    數字 shù tzù DIGIT (in the decimal representation).

20. 均 chūn equal
21. 不 pù not
22. 等 těng degree, to compare, equal

均不等 chūn pù těng not equal

23. 於 yǘ at, it, on, with, to

24. 零 líng Zero

25. 設 shè to arrange, PUT

26. 此 tz'ǔ this, these

27. 種 chǔng kind, class

28. 所 sǒ that which

29. 成 ch'éng to become, achieve

30. 集 chí to collect, collection

31. 合 hé to collect, together

集合 chí hé SET

32. 吾 wú I

33. 人 jén human (male or female)

吾人 wú jén WE (of the author)

34. 熟 shú acquainted with, to know

35. 知 chīh to know

熟知 shú chīh to know well

36. 級 chí rank, degree

級數 chí shù SERIES

37. 收 shōu to collect, to gather

38. 斂 lièn to collect, to gather

收斂 shōu lièn TO CONVERGE

39. 者 chě one which is (put after the expression)

40. 值 chíh value, SUM

41. 是 shìh to be

42. 否 fǒu not to be

是否 shìh fǒu whether ... is

43. 超 ch'āo to exceed

44. 越 yuè to pass over

超越 ch'āu yuè TRANSCENDENTAL

45. 又 yòu again, also, moreover

46. 可 k'ě can, may

47. 用 yùng to use, make use of

48 平 p'íng level, fair, peace

49. 常 ch'áng constantly, even

平常 p'íng ch'áng common, ordinary

5o. 函 hán letter, envelope

函數 hán shù FUNCTION

51. 相 hsiāng one another

52. 當 tāng to take the place of, at the time of

相當 hsiāng tāng to correspond to, to be equivalent to

53. 困 k'ùn to be weary, distressed 當....時

54. 難 nán difficult, distress

困難 k'ùn nán difficulty

55. 問 wèn to ask

56. 題 t'í subject

問題 wèn t'í PROBLEM

57. 作 tsò to do, to make

作者 tsò chě AUTHOR

58. 未 wèi not, not yet

59. 能 néng can, be able to

60. 解 chiě to understand, analyse

61. 決 chüé to decide

解決 chiě chüé to solve

62. 本 pěn root, origin; this

63. 文 wén essay, paper

64. 將 chīang going to, intend to

65. 討 t'ǎo to seek, to ask for

66. 論 lùn to discuss

討論 t'ǎo lùn to discuss, investigate

67. 較 chiào difference, more

68. 簡 chiěn simple

69. 單 tān single, only

簡單 chiěn tān simple

70. 此 tz'ǔ this

71. 與 yǚ with, to give

72. 有 yǒu to have; there are

73. 下 hsìa under, below, following

74. 列 lìe row, line, series; to arrange

下列 hsìa lìe in the following row

75. 關 kuān gate, to shut

76. 係 hsì to belong to

關係 kuān hsì RELATION

77. 證 chèng to prove

78. 明 míng bright, clear

證明 chèng míng TO PROVE, PROOF

79. 代 tài to replace

代數 tài shù ALGEBRA, ALGEBRAIC

80. 且 ch'ǐe moreover, also

81. 時 shíh time

當 ...時 if ...

82. 及 chí and, also, with; to arrive at

以及 ǐ chí and including

83. 他 t'ā other (he, she, it)

其他 ch'í t'ā other

84 類 lèi kind, category

85. 似 szù resembling

86. 陳 ch'én to state

87. 述 shù to state

陳述 ch'én shù STATEMENT

88. 固 kù firm

89. 定 tìng secure, settled

固定 kù tìng FIXED

90. 任 jén to undertake, office

91. 何 hé how, what, which

任何 jén hé ANY, ARBITRARY

q 進法 q chìn fǎ REPRESENTATION TO THE BASIS q

92. 直 chíh direct, plain, honest

93. 書 shū book, to write

94. 適 shìh to reach, just

適合 shìh hé TO SATISFY

95. 條 t'iáo order, article, clause

96. 件 chièn article, item

條件 t'iáo chièn CONDITION

97. 目 mù eye

98. 的 tì actual, target (particle in the spoken language)

目的 mù tì AIM, OBJECT

99. 在 tsài at, to exist

100. 產 ch'ǎn to bear

101. 生 shēng to bear

產 ch'ǎn shēng TO GENERATE, GENERATING

102. 性 hsìng nature, quality

103. 質 chìh nature

性質 hsìng chìh PROPERTY

104. 方 fāng square

105. 程 ch'éng rule, regulation

方程 fāng ch'éng EQUATION

106. 顯 hsiěn apparent

107. 然 ján thus (forms adverbs)

顯然 hsiěn ján OBVIOUS, OBVIOUSLY

108. 長 ch'áng long

長函數 ch'áng hán shù MAJORANT FUNCTION

109. 因 yīn cause, owing to, from

因之 yīn chīh THUS

110. 絕 chüé to cut, very

111. 對 tuèi a pair, to reply

絕對 chüé tuèi ABSOLUTE, ABSOLUTELY

112. 後 hòw after (put after the expression)

此後 tz'ǔ hòu FROM NOW ON

113. 假 chiǎ false

假設 chiǎ shè TO ASSUME, HYPOTHESIS

114. 恒 héng permanently, constantly

115. 小 hsiǎo small

小於一 hsiǎo yǘ ī smaller than 1

116. 或 huò or

117. 略 lüè somewhat

118. 同 t'úng the same, with

略有不同 lüè yǒu pù t'úng there is some difference

119. 今 chīn now

120. 分 fēn to divide, to distinguish

121. 別 pié to distinguish, to separate

分別 fēn pié difference, to distinguish

122. 屬 shǔ to belong to

123. 則 tsē then

可能 k'ě néng POSSIBILITY

124. 二 èrh 2

125. 故 kù cause; hence

126. 和 hé friendly, together

和數 he shu SUM

127. 自 tzù from, self, naturally

128. 得 té to get, obtain

129. 皆 chiē all, together

130. 包 pāo to enclose

131. 含 hán to contain

包含 pāo hán to contain, include

132. 式 shìh formula, system, example

133. 例 lì example

134. 析 hsī to analyse

解析 chiě hsī ANALYSIS

解析質 chiě hsī chìh analytic nature

135. 意 ì thought

任意 jén ì ARBITRARY

136. 根 kēn root, origin

137. 據 chù proof, to maintain, according to

138. 義 ì right, meaning

定義 tìng ì DEFINITION

139. 另 lìng beside, another, extra

140. 推 t'uēi to push, to investigate
141. 出 ch'ū to go out
推出 t'uēi ch'ū to deduce
142. 結 chié to bear
143. 果 kuǒ fruit
結果 chié kuǒ RESULT
144. 理 lǐ law, principle
定理 tìng lǐ THEOREM
145. 除 ch'ú to exclude
146. 特 t'è a bull; distinguished, special
147. 殊 shū to kill; distinguished
特殊 t'è shū SPECIAL
148. 情 ch'íng feeling, affection
149. 形 hsíng shape, form
情形 ch'íng hsíng state, condition
150. 外 wài outside (after the term)
151. 圓 yüán circle, round
除...外 ch'ú ... wài exception
152. 內 nèi inside (after the term)
153. 天 t'iēn heaven, day
天然 t'iēn ján NATURAL
154. 邊 piēn side, boundary
155. 界 chiè boundary
邊界 piēn chiè boundary, frontier
156. 大 tà great
大於 tà yǘ greater than
157 次 tz'ù order, degree, second
次數 tz'ù shù DEGREE

158. 原 yüán origin

159. 始 shǐh to begin

原始 yüán shǐh PRIMITIVE

160. 多 tō many

161. 項 hsiàng item, term

多項式 tō hsiàng shìh POLYNOMIAL

162. 沿 yén along, to go along

163. 實 shíh true, real

164. 軸 chóu axle, axis

實軸 shíh chóu REAL AXIS

165. 至 chìh to arrive at, to, until, most

166. 三 sān 3

167. 極 chí very, utmost

168. 易 ì easy, to exchange

推得 t'uēi té TO DEDUCE

169. 上 shàng above, on, to ascent

170. 全 ch'üán fully, all, total

171. 部 pù class, department

全部 ch'üán pù the whole set

172. 點 tiěn point

173. 造 tsào to make, to create

造成 tsào ch'eng to form

174. 密 mì dense

密集 mì chí DENSE

175. 異 ì to differ, strange, rare

係異點 hsì ì tiěn SINGULAR POINT

176. 欲 yǜ to wish

177. 系 hsì connection, link, COROLLARY

178. 算 suàn to count, to plan
算術 suàn shù ARITHMETIC
179. 曾 ts'éng already
180. 二 èrh 2
181. 具 chù all
182. 冪 mì POWER
冪級數 mì chí shù POWER SERIES
有理數 yǒu lǐ shù RATIONAL NUMBER
183. 鄰 lín near, close
184. 近 chìn near, close
鄰近 lín chìn NEIGHBOURHOOD
185. 非 fēi no, not
不恒等 pù héng těng NOT IDENTICALLY EQUAL
186. 視 shìh to see, to observe
187. 而 érh and, but, then
188. 乃 nǎi now, but, moreover
189. 面 mièn face, surface
另一方面 lìng ī fāng mièn on the other hand
190. 存 ts'ún to store, to be alive
存在 ts'ún tsài to exist
191. 使 shǐh to order, to cause
恒等式 héng těng shìh IDENTITY
192. 體 t'ǐ body
全體 ch'üán t'ǐ the whole set of
193 個 kè piece
任意 jèn ì ARBITRARY
194. 奇 ch'í strange, marvelous, ODD

195. 四 szù 4

196. 只 chǐh only

197. 需 hsǖ necessary

198. 即 chí at once

即可 chí kě one immediately can

199. 乘 ch'éng to multiply

200. 積 chī to multiply

乘積 ch'éng chī PRODUCT

201. 必 pì must, certainly

202. 僅 chín only, simply

203. 無 wú not

204. 重 chùng heavy

多重 tō chùng MULTIPLE

205. 衝 ch'úng to push forward

206. 突 t'ū to rush against, syddenly

衝突 ch'úng t'ū collision, CONTRADICTION

207. 但 tàn but

208. 總 tsǔng to collect

總集 tsǔng chí to collect

209. 節 chiě node, chapter

210. 五 wǔ 5

其他 ch'í t'ā other

211. 窮 ch'iúng poor, exhausted

無窮 wú ch'iúng INFINITE

有窮 yǒu ch'iúng FINITE

(1)

令	m	爲	一	正	整	數,	如
lìng		wéi	ī	chèng	chěng	shù	jú
1		2	3	4	5	6	7
以	十	進	法	表	示	之,	其
ǐ	shíh	chìn	fǎ	piǎo	shìh	chīh	ch'í
8	9	10	11	12	13	14	15
中	每	位	數	字	均	不	等
chūng	měi	wèi	shù	tzù	chǘn	pù	těng
16	17	18	6	19	20	21	22
於	零。	設	N	爲	此	種	m
yǘ	líng	shè		wéi	tz'ǔ	chǔng	
23	24	25		2	26	27	
所	成	之	集	合,	吾	人	孰
sǒ	ch'éng	chīh	chí	hé	wú	jén	shú
28	29	14	30	31	32	33	34

(2)

知	級	數	$\sigma=\sum_{n\in\mathfrak{A}}\frac{1}{n}$		爲	收	斂
chīh	chí	shù			wéi	shōu	lièn
35	36	6			2	37	38
者。	其	值	σ	是	否	一	超
chě	ch'í	chíh		shìh	fǒu	ī	ch'āo
39	15	40		41	42	3	43
越	數,	又	是	否	可	用	平
yüè	shù	yòu	shìh	fǒu	k'ě	yùng	p'íng
44	6	45	41	42	46	47	48
常	函	數	表	示	之,	爲	相
ch'áng	hán	shù	piǎo	shìh	chīh	wéi	hsiāng
49	50	6	12	13	14	2	51
當	困	難	之	問	題,	作	者
tāng	k'ùn	nán	chīh	wén	t'í	tsò	chě
52	53	54	14	55	56	57	39

③

未	能	解	決	之。	本	文	中
wèi	néng	chiě	chüé	chīh	pěn	wén	chūng
58	59	60	61	14	62	63	16
吾	人	將	討	論	一	較	簡
wú	jén	chiāng	t'ǎo	lùn	ī	chiào	chiěn
32	33	64	65	66	3	67	68
單	之	級	數	$f(z)=$	$\sum_{n\in\alpha} z^n$,	此	級
tān	chīh	chí	shù			tz'ǔ	chí
69	14	36	6			70	36
數	與	σ	有	下	列	之	關
shù	yǚ		yǒu	hsià	liè	chīh	kuān
6	41		42	43	44	14	45
係	$\sigma=\int_0^1$	$\frac{f(z)}{z}dz$。	吾	人	將	證	明,
hsì			wú	jén	chiāng	chèng	míng
46			32	33	64	47	48

當	=	爲	一	代	數	數，	且
tāng		wéi	ī	tài	shù	shù	ch'ǐe
52		2	3	79	6	6	80
$0<\|z\|<1$	時，	$f(z)$	以	及	其	他	類
	shíh		ǐ	chí	ch'í	t'ā	lèi
	81		8	82	15	83	84
似	之	函	數	之	值	均	爲
szù	chīh	hán	shù	chīh	chíh	chūn	wéi
85	14	50	6	14	40	20	2
超	越	數。					
ch'āo	yüè	shù					
43	44	6					
§1.	問	題	之	陳	述：	設	$q\geq 2$
	wèn	t'í	chīh	ch'én	shù	shè	
	55	56	14	86	87	25	

為	一	固	定	之	整	數,	任
wéi	ī	kù	tìng	chīh	chěng	shù	jèn
2	3	88	89	14	5	6	90
何	正	整	數	n	可	用	q
hé	chèng	chěng	shù		k'ě	yùng	
91	4	5	6		46	47	
進	法	以	表	示	之	如	下:
chìn	fǎ	ǐ	piǎo	shìh	chīh	jú	hsìa
10	11	8	12	13	14	7	73

$$n = h_0 + h_1 q + \cdots + h_r q^r = (h_0, h_1, \ldots, h_r),$$

其	中	$h_0, \ldots, h_r$	為	0	與	$q-1$	中
ch'í	chūng		wéi		yǔ		chūng
15	16		2		71		16

(6)

之	整	數	且	$n \neq 0$。	當	$n = 0$	時,
chīh	chěng	shù	ch'iě		tāng		shíh
14	5	6	80		52		81
吾	人	可	直	書	$0 = (0)$。		
wú	jén	k'ě	chíh	shū			
32	33	46	92	93			
設	k	爲	$1, \ldots, q-1$	中	之	一	固
shè		wéi		chūng	chīh	ī	kù
25		2		16	14	3	88
定	數	字,	令	$\sqrt{(k)}$	表	示	所
tìng	shù	tzù	lìng		piǎo	shìh	sǒ
89	6	19	1		12	13	28
有	適	合	下	列	條	件	之
yǒu	shìh	hé	hsià	liè	t'iáo	chièn	chīh
42	94	31	43	44	95	96	14

(1)

整	數	n	所	成	之	集	合
chěng	shù		sǒ	ch'éng	chīh	chí	hé
5	6		28	29	14	30	31
$n=(h_0,h_1,\ldots,h_r)\geq 0$,			$0\leq h_\rho\leq$	$q-1$, $h_\rho\neq k$		$(\rho=0,1,\ldots,r)$	。
本	文	目	的	在	討	論	$\mathcal{N}(k)$
pěn	wén	mù	tì	tsài	t'ǎo	lùn	
62	63	94	98	99	65	66	
之	產	生	函	數	$f_k(z)=$	$\sum_{n\in\mathcal{N}(k)}$	z^n
chīh	ch'ǎn	shēng	hán	shù			
14	100	101	50	6			
之	性	質。					
chīh	hsìng	chìh					
14	102	103					

§2,	$f(z)$	所	適	合	之	函	數
		sǒ	shìh	hé	chīh	hán	shù
		28	94	31	14	50	6
方	程。	顯	然	$(1-z)^{-1}$	爲	$f_k(z)$	之
fāng	ch'éng	hsiěn	ján		wéi		chīh
104	105	106	104		2		14
長	函	數	$f(z) \ll (1-z)^{-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}$。			因	之,
ch'áng	hán	shù				yīn	chīh
108	50	6				109	14
當	$\lvert z\rvert<1$	時,	$f_k(z)$	所	表	之	級
tāng		shíh		sǒ	piǎo	chīh	chí
52		81		28	12	14	36
數	爲	絕	對	收	斂。	此	後
shù	wéi	chüé	tuèi	shōu	lièn	tz'ǔ	hòu
6	2	110	111	34	38	40	112

吾	人	將	假	設	z	之	絕
wú	jén	chiāng	chiă	shè		chīh	chüé
32	33	64	113	25		14	110
對	值	恒	小	於	一。		
tuèi	chíh	héng	hsiǎo	yǘ	ī		
111	40	114	115	23	3		
$f_k(z)$	與	$f_k(z^q)$	中	有	一	簡	單
	yǚ		chūng	yǒu	ī	chiěn	tān
	41		16	42	3	68	69
之	關	係,	當	$k=0$	或	$k\neq0$	時,
chīh	kuān	hsì	tāng		huò		shíh
14	45	46	52		116		81
略	有	不	同,	今	分	別	討
lüè	yǒu	pù	t'úng	chīn	fēn	pié	t'ǎo
117	42	21	118	119	120	121	65

(10)

論	文	如	下：				
lùn	chīh	jú	hsià				
60	14	7	73				
I, $k=0$,	設	$n=(h_0,$	$\ldots,h_\nu)$	屬	於	$\mathcal{N}(0)$,	則
	shè			shǔ	yǘ		tsē
	25			122	23		123
有	二	種	可	能：	(i) $\nu=0$,	$n=h_0$,	故
yǒu	èrh	chǔng	k'ě	néng			kù
72	124	27	46	59			
n	為	$1,2,\ldots,q-1$	中	之	一	整	數；
	wéi		chūng	chīh	ī	chěng	shù
	2		16	14	3	5	6
(ii) $\nu\geq1$,	n	可	書	為	下	列	和
		k'ě	shū	wéi	hsià	lìe	hé
		46	93	2	73	74	126

數	$n=k_0+qn'$,	其	中	$n'=(k_1,k_2,\dots,k_\nu)\in\mathcal{N}(0)$,		$1\le k_i\le q-1$
shù		ch'í	chūng			
6		15	16			

$(i=1,\dots,\nu)$.	因	之,	吾	人	恒	有
	yīn	chīh	wú	jén	héng	yǒu
	104	14	32	33	114	42

$$f_0(z)=\sum_{k_0=0}^{q-1}\left\{z^{k_0}+\sum_{n'\in\mathcal{N}(0)}z^{k_0+qn'}\right\}.$$

自	此	可	得
tzù	tz'ǔ	k'ě	té
124	40	46	128

(I): $$f_0(z)=\frac{z-z^q}{1-z}\left(1+f_0(z^q)\right).$$

II. $k=1,$	$2,\dots,q-1.$	設	$n=(h_0,\dots,h_r)$	屬	於	$\mathcal{N}(k),$	則
		shè		shǔ	yú		tsē
		25		122	23		123
n	可	書	爲	下	列	和	數
	k'ě	shū	wéi	hsīa	lìe	hé	shù
	46	93	2	73	74	126	6
$n=h_0+qn',$	其	中	h_0	爲	$0,1,\dots,k-1,$	$k+1,\dots,q-1$	中
	ch'í	chūng		wéi			chūng
	15	16		2			16
之	一	數,	且	$n'=(h_1,\dots,$	$h_r)\in\mathcal{N}(k).$	顯	然,
chīh	ī	shù	ch'ǐe			hsǐen	ján
14	3	6	80			106	104
吾	人	有	$f_k(z)=\sum_{\substack{h_0=0\\h_0\neq k}}^{q-1}$	$\sum_{n'\in\mathcal{N}(k)} z^{h_0+qn'}$		.	因
wú	jén	yǒu					yīn
32	33	72					109

(13)

之,	$f_k(z)$	適	合				
chīh		shìh	hé				
14		94	31				

(II): $f_k(z)=\left(\frac{1-z^q}{1-z}-z^k\right)f_k(z^q)$。

	函	數	方	程	(I)	與	(II)
	hán	shù	fāng	ch'éng		yǚ	
	50	6	104	105		41	
皆	包	含	於	下	列	式	中
chīe	pāo	hán	yǘ	hsìa	lìe	shìh	chūng
129	130	131	23	73	74	132	16

(1): $f_k(z)=\left(\frac{1-z^k}{1-z}-z^k\right)\left(\varepsilon_k+f_k(z^q)\right)$ $(k=0,1,\ldots,q-1)$。

其	中					
ch'í	chūng					
15	16					
(2):		$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$	如 如	$k=0$, $k \neq 0$,		
			jú			
			4			
例:	當	$q=2$	時,	吾	人	有
lì	tāng		shíh	wú	jén	yǒu
132	52		81	32	33	42

$f_0(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{2^\nu - 1}$, $\quad f_1(z) = 1$,

$f_0(z) = z + z f_0(z^2)$, $\quad f_1(z) = f_1(z^2)$ 。

§3.	$f_k(z)$	之	解	析	質。	設	$q \geq 2$
		chīh	jiě	hsī	chìh	shè	
		14	66	134	103	25	

(15)

爲	一	任	意	整	數,	根	據
wéi	ī	jèn	ì	chěng	shù	kēn	chǜ
2	3	90	135	5	6		
定	義,	吾	人	有	$f_0(z) = z + z^q + \dots + z^{q-1} + \dots,$ $f_k(z) = z + z^2 + \dots + z^{k-1} + z^{k+1} + \dots$ $(k = 1, 2, \dots, q-1).$		
tìng	ì	wú	jén	yǒu			
89	138	32	33	42			
因	之						
yīn	chīh						
109	14						
(3):		$\lim_{\nu \to \infty} f_k(z^{q^\nu}) = 1 - \varepsilon_k$				$(k = 0, 1, \dots, q-1).$	
另	一	方	面,	自	函	數	方
lìng	ī	fāng	mièn	tzù	hán	shù	fāng
139	3	104	140	124	50	6	104

程	(I)	與	(II)	可	推	出	下
ch'êng		yü		k'ê	t'ui	ch'ū	hsià
105		41		46	140	141	43

列	結	果:
liè	chié	kuǒ
44	142	143

$$(4):\ f_0(z)=\frac{z-z^q}{1-z}+\frac{z-z^q}{1-z}\,\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q}+\frac{z-z^q}{1-z}\,\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q}\,\frac{z^{q^2}-z^{q^3}}{1-z^{q^2}}+\cdots+$$

$$+\frac{z-z^q}{1-z}\,\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q}\cdots\frac{z^{q^{\nu-1}}-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}\left(1+f_0(z^{q^\nu})\right),$$

$$(5):\ f_k(z)=\left(\frac{1-z^q}{1-z}-z^k\right)\left(\frac{1-z^{q^2}}{1-z^q}-z^{kq}\right)\cdots\times$$

$$\times\left(\frac{1-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}-z^{kq^{\nu-1}}\right)f_k(z^{q^\nu})\qquad(k=1,2,\cdots,q-1).$$

定	理	一:	除	$q=2,k=1$	特	殊	情
tìng	lǐ	ī	ch'ú		t'è	shū	ch'íng
89	144	3	145		146	144	148

(14)

形	外，	$f_k(z)$	在	單	位	圓	內
hsíng	wài		tsài	tān	wèi	yüán	nèi
149	150		99	69	18	151	152
為	一	分	析	函	數，	且	以
wéi	ī	fēn	hsī	hán	shù	ch'iě	ǐ
2	3	120	134	50	5	80	8
單	位	圓	為	天	然	邊	界。
tān	wèi	yüán	wéi	t'iēn	ján	piēn	chièh
69	18	151	2	153	104	154	155
證	明：	設	k	與	λ	為	大
chèng	míng	shè		yǚ		wéi	tà
44	48	25		4.1		2	156
於	或	等	於	零	之	整	數，
yǘ	huò	těng	yǘ	líng	chīh	chěng	shù
23	1.16	22	23	24	14	5	6

又	設	$\Theta = e^{\frac{2k\pi i}{q^\lambda}}$		為	一	q^ν	次
yòu	shè			wéi	ī		tz'ù
45	25			2	3		154
之	原	始	單	位	根。	當	$\lambda \geq 1$
chīh	yüán	shǐh	tān	wèi	kēn	tāng	
14	158	159	69	18	136	52	
時,	多	項	式				
shíh	tō	hsiàng	shìh				
81	160	161	132				
$\frac{z^{q^{\nu-1}} - z^{q^\nu}}{1 - z^{q^{\nu-1}}}$,		$\frac{1 - z^{q^\nu}}{1 - z^{q^{\nu-1}}} - z^{kq^{\nu-1}}$			$(\nu = 1, 2, \ldots, \lambda)$		
之	次	數	小	於	q^ν。	因	之,
chīh	tz'ù	shù	hsiǎo	yǘ		yīn	chīh
14	154	6	115	23		109	14

當	$z=\theta$	時,	此	二	式	均	不
tāng		shíh	tz'ǔ	èrh	shìh	chūn	pù
52		81	70	124	132	20	21
等	於	零。	此	後	吾	人	將
těng	yǘ	líng	tz'ǔ	hòu	wú	jén	chiāng
22	23	24	70	112	32	33	64
$q=2, k=1$	一	情	形	除	外,	則	當
	ī	ch'íng	hsíng	ch'ú	wài	tsē	tāng
	3	148	149	145	150	123	52
√	沿	實	軸	自	0	至	1
	yén	shíh	chóu	tzù		chìh	
	162	163	164	124		165	
時,	顯	然					
shíh	hsiěn	ján					
81	106	104					

(6); $\lim_{r \to 1} f_n(r) = \infty$。

根	據	(4),(5),(6)	三	式,	以	及	$\Theta^{q^\lambda}=1$,
kēn	chǜ		sān	shìh	ǐ	chí	
130	134		166	132	8	82	
吾	人	極	易	推	得	$\lim_{r \to 1} f_n(r\Theta) = \infty$。	
wú	jén	chí	ì	t'uei	té		
32	33	167	168	140	128		
在	單	位	圓	上,	全	部	Θ
tsài	tān	wèi	yüán	shàng	chüán	pù	
99	69	18	151	169	170	171	
點	造	成	一	密	集	點	集,
tiěn	tsào	ch'éng	ī	mì	chí	tiěn	chí
142	143	29	3	144	30	142	30

故	此	圓	上	每	點	均	係
kù	tz'ǔ	yüán	shàng	měi	tiěn	chūn	hsì
125	40	151	169	14	142	20	46
異	點,	明	所	欲	證。		
ì	tiěn	míng	sǒ	yù	chèng		
145	142	48	28	146	44		
系:	將	$q=2, k=1$	一	情	形	除	外,
hsì	chiāng		ī	ch'íng	hsíng	ch'ú	wài
144	64		3	148	149	145	150
則	$f_k(z)$	恒	爲	z	之	超	越
tsē		héng	wéi		chīh	ch'āo	yüè
123		114	2		14	43	44
數。	(	自 (3),	(4), (5)	極	易	得。)	
shù		tzù		chí	ì	té	
6		124		164	168	128	

§4,	$f_\nu(z)$	之	算	術	性	質。	作
		chīh	suàn	shù =述	hsìng	chìh	tsò
		14	148	84	102	103	54
者	曾	得	一	結	果,	其	特
chě	ts'éng	té	ī	chíe	kuǒ	ch'í	t'è
39	179	128	3	142	143	15	146
殊	情	形	可	述	之	如	下:
shū	ch'íng	hsíng	k'ě	shù	chīh	jú	hsià
147	148	149	46	84	14	4	43
定	理	二:	設	$q\geq 2$	為	一	固
tìng	lǐ	èrh	shè		wéi	ī	kù
89	144	180	25		2	3	88
定	之	整	數,	又	設	$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$	
tìng	chīh	chěng	shù	yòu	shè		
89	14	5	6	45	25		

爲	一	具	有	下	列	性	質
wéi	ī	chǚ	yǒu	hsià	liè	hsìng	chìh
2	3	181	72	73	74	102	103
之	冪	級	數:	(i) α,	皆	爲	有
chīh	mì	chí	shù		chīe	wéi	yǒu
14	182	36	6		129	2	72
理	數;	(ii) $f(z)$	在	$z=0$	之	鄰	近
lǐ	shù		tsài		chīh	lín	chìn
144	6		99		14	183	184
收	斂;	(iii) $f(z)$	非	z	之	代	數
shōu	lièn		fēi		chīh	tài	shù
34	38		185		14	79	6
函	數;	(iv) $f(z)$	適	合	$f(z^q) =$	$\dfrac{a(z)f(z)+b(z)}{c(z)f(z)+d(z)}$,	
hán	shù		shìh	hé			
50	6		94	31			

其	中	$a(z), b(z)$	$c(z), d(z)$	爲	z	之	多
ch'í	chūng			wéi		chīh	tō
15	16			2		14	160
項	式,	且	其	係	數	均	爲
hsiàng	shìh	ch'iě	ch'í	hsì	shù	chǖn	wéi
161	132	80	15	46	6	20	2
理	數,	且	$\Delta(z)=a(z)d(z)-b(z)c(z)$		不	恒	等
lǐ	shù	ch'iě			pù	héng	těng
144	6	80			21	114	22
於	零。	如	z	爲	一	代	數
yǘ	líng	jú		wéi	ī	tài	shù
23	24	4		2	3	49	6
數,	且	$0<\|z\|<1$,	$\Delta(z^{\nu})\neq 0$			$(\nu=0,1,2,\ldots)$,	
shù	ch'iě						
6	80						

則	$f(z)$	爲	一	超	越	數。	
tsē		wéi	ī	ch'āo	yüè	shù	
123		2	3	43	44	6	
當	此	函	數	$f(z)$	爲	$f_k(z)$	時，
tāng	tz'ǔ	hán	shù		wéi		shíh
52	70	50	6		2		81
吾	人	有	$a(z)=1,$ $c(z)=0,$	$b(z) =$ $d(z) =$	$-\frac{z-z^q}{1-z},$ $\frac{z-z^q}{1-z},$	或	
wú	jén	yǒu				~~hou~~ huò	
32	33	42				116	
$a(z)=1,$ $b(z)=c(z)=0,$	$d(z)=\frac{1-z^q}{1-z}-z^k,$	視	$k=0$	或	$k\neq 0$	而	定。
		shìh		huò		érh	tìng
		186		116		184	89
於	是	乃	得：				
yǘ	shìh	nǎi	té				
23	41	188	128				

定	理	三:	設	z	爲	一	代
tìng	lǐ	sān	shè		wéi	ī	tài
89	144	166	25		2	3	49
數	數,	當	$k=0$	或	$k=1,2,\ldots,q-1$	時,	分
shù	shù	tāng		huò		shíh	fēn
6	6	52		116		81	120
別	適	合	不	等	式	$0<\|z\|<1$,	或
pié	shìh	hé	pù	těng	shìh		huò
121	94	31	21	22	132		116
$0<\|z\|<1$,	$\frac{1-z^{q^{2\nu}}}{1-z^{q^{\nu+1}}}-z^{kq^{\nu-1}}\neq 0$				$(\nu=0,1,2,\ldots)$,		
則	$f_k(z)$	爲	一	超	越	數。	另
tsē		wéi	ī	ch'āo	yüè	shù	lìng
123		2	3	43	44	6	139

一	方	面,	吾	人	恒	有	
ī	fāng	mièn	wú	jén	héng	yǒu	
3	104	189	32	33	114	72	
	$f_k(\varepsilon)=1+\varepsilon_k$			$(k=0,1,\ldots,q-1)$。			
又	如	$k=1,2,$	$\ldots,q-1,$	$0<\lvert z\rvert<1,$	且	有,	$(\nu=0,1,2,\ldots)$
yòu	jú				ch'ǐe	yǒu	
45	7				80	72	
存	在	使	$\frac{1-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}$	$-z^{kq^{\nu-1}}=0,$	則	$f_k(z)=0$。	
ts'ún	tsài	shǐh			tsē		
190	99	191			123		
§5.	$f_k(z)$	之	零	點。	令		
		chīh	líng	tiěn	lìng		
		14	24	172	1		

$\varphi_k(z) = \frac{1-z^q}{1-z} - z^k \quad (k = 1, 2, \ldots, q-1),$

則	吾	人	有	恒	等	式	
tsē	wú	jén	yǒu	héng	těng	shih	
123	32	32	72	114	22	132	

(4): $\varphi_k\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-(q-1)} \varphi_{q-k-1}(z)$。

今	將	討	論	$\varphi_k(z)$	之	零	點
chīn	chiāng	t'ǎo	lùn		chīh	líng	tiěn
119	64	65	66		14	24	172
3。	設	此	全	體	零	點	中,
	shè	tz'ǔ	ch'üán	t'ǐ	líng	tiěn	chūng
	25	70	192	193	24	172	16

有	$\mu(k)$	個	之	其	絕	對	值
yǒu		kè		ch'í	chüé	tuèi	chíh
42		194		15	110	111	40
小	於	一,	又	有	$\nu(k)$	個	之
hsiǎo	yǘ	ī	yòu	yǒu		kè	
115	23	3	45	42		194	
其	絕	對	值	等	於	一。	自
ch'í	chüé	tuèi	chíh	těng	yǘ	ī	tzù
15	110	111	40	22	23	3	124
下	列	二	式	$\varphi_{q-1}(z) = 1+z+\cdots+z^{q-2}$, (任	意	之 q)	
hsià	liè	èrh	shìh	jèn	ì	chīh	
43	44	180	132	90	135	14	
$\varphi_{\frac{q-1}{2}}(z) = (1+z+\cdots+z^{\frac{q-3}{2}})(1+z^{\frac{q+1}{2}})$,	(q 爲	奇	數)		吾	人	知,
	wéi	ch'í	shù		wú	jén	chīh
	2	194	6		32	33	35

當	$k=q-1$	或	$k=\frac{q-1}{2}$	爲	一	整	數
tāng		huò		wéi	ī	chěng	shù
52		116		2	3	5	6
時,	$\mu(k)=0$。	又	自	(7)	式,	可	得
shíh		yòu	tzù		shìh	k'ě	té
81		45	124		132	46	128
(8)		$\nu(k)=\nu(q-k-1)$。					
定	理	四:	設	k	爲	適	合
tìng	lǐ	szù	shè		wéi	shìh	hé
89	144	195	25		2	94	31
$1\le k\le q-2$	之	整	數,	且	$k\neq\frac{q-1}{2}$,	則	$\mu(k)>0$。
	chīh	chěng	shù	ch'iě		tsē	
	14	5	6	80		123	

證	明:	$\varphi_k(=)$	爲	一	$q-1$	次	多
chèng	míng		wéi	ī		tz'ù	tō
77	78		2	3		157	160
項	式,	故	吾	人	只	需	證
hsiàng	shìh	kù	wú	jén	chǐh	hsǖ	chèng
161	132	125	32	33	196	197	77
明	$\nu(k)<q-1$	即	可,	所	有	$\varphi_k(=)$	之
míng		chí	k'ě	sǒ	yǒu		chīh
78		198	46	28	72		14
零	點	之	乘	積	爲	1;	因
líng	tiěn	chīh	ch'éng	chī	wéi		yīn
24	172	14	199	200	2		109
之,	如	零	點	中	有	絕	對
chīh	jú	líng	tiěn	chūng	yǒu	chüé	tuèi
14	7	24	172	16	72	110	111

值	不	等	於	一	者,	則	必
chíh	pù	těng	yǘ	ī	chě	tse	pì
40	21	22	23	3	39	123	201
有	一	零	點,	其	絕	對	值
yǒu	ī	líng	tiěn	ch'í	chüé	tuèi	chíh
42	3	24	142	15	110	111	40
小	於	一。					
hsiǎo	yǘ	ī					
115	23	3					
根	據	(8)	式,	吾	人	僅	需
kēn	chǜ		shìh	wú	jén	chín	hsǜ
136	134		132	32	33	202	194
討	論	下	列	情	形		
t'áo	lùn	hsià	liè	ch'íng	hsíng		
65	66	43	44	148	149		

(9): $k=1,2,\dots,\left[\frac{q-2}{2}\right]$。

在	單	位	圓	上,	$\varphi_k(z)$	無	多
tsài	tān	wèi	yüán	shàng		wú	tō
99	69	18	151	169		203	160
重	零	點	因	否	則		
chùng	líng	tiěn	yīn	fǒu	tsē		
204	24	142	109	42	123		

$$1-z^q-z^k+z^{k+1}=0,$$

$$q z^{q-1}+k z^{k-1}-(k+1)z^k=0,$$

於	是	乃	有	$(q-k)z^q=z^{k+1}-k$,
yǘ	shìh	nǎi	yǒu	
23	41	188	142	

故	$q-k\le k+1,\ k\ge\frac{q-1}{2}$			此	與	假	設
kù				tz'ǔ	yǚ	chiǎ	shè
125				70	71	113	25
衝	突。						
ch'ūng	t'ū						
205	206						
設	$z=e^{\alpha i}$	$(0<\alpha<2\pi)$	為	$\varphi_k(z)=(1+z+\dots+z^{q-1})-z^k$			
shè			wéi				
25			2				
在	單	位	圓	上	之	一	零
tsài	tān	wèi	yüán	shàng	chīh	ī	líng
99	69	18	151	169	14	3	24
點。	因	$z^{-\frac{q-1}{2}}\varphi_k(z)=\frac{z^{\frac{q}{2}}-z^{-\frac{q}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}}-z^{-\frac{q-2k-1}{2}}$				)	
tiěn	yīn						
142	109						

故	z	適	合	下	列	方	程
kù		shìh	hé	hsià	liè	fāng	ch'éng
125		94	31	43	44	104	105
	$\frac{\sin\frac{q\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$	$=\cos$	$\frac{q-2k-1}{2}\alpha$	$-i\sin$	$\frac{q-2k-1}{2}$	α。	
因	之,	$\sin$	$\frac{q-2k-1}{2}$	$\alpha=0$,	故	$\alpha=$	$\frac{2n\pi}{q-2k-1}$
yīn	chīh				kù		
109	14				125		
其	中	n	爲	1,2,	,q-2k-1	中	之
ch'í	chūng		wéi			chūng	chīh
15	16		2			16	14
一	數。	但	$q-2k-1$	$<q-1$;	於	是	$\nu(q)<q-1$。
ī	shù	tàn			yǘ	shìh	
3	6	204			23	41	

總	集	本	節	結	果，	吾	人
tsǔng	chí	pěn	chié	chié	kuǒ	wú	jén
208	30	62	209	142	143	32	33
有							
yǒu							
42							
定	理	五：	當	$k=0$，	或	$k=q-1$，	或
tìng	lǐ	wǔ	tāng		huò		huò
89	144	210	52		116		116
$k=\frac{q-1}{2}$	為	一	整	數	時，	$f_k(z)$	在
	wéi	ī	chěng	shù	shíh		tsài
	2	3	5	6	81		99
單	位	圓	内	無	零	點，	在
tān	wèi	yüán	nèi	wú	líng	tiěn	tsài
69	18	151	152	203	24	142	99

其	他	情	形	時,	$f_k(z)$	有	無
ch'í	t'ā	ch'íng	hsíng	shíh		yǒu	wú
15	83	148	149	81		112	203
窮	多	零	點,	且	此	零	點
ch'íung	tō	líng	tiěn	ch'iě	tz'ǔ	líng	tiěn
211	160	24	142	80	110	24	142
皆	爲	代	數	數。			
chiē	wéi	tài	shù	shù			
129	2	119	6	6			

某種特別整數之產生函數

(On The Generating Functions of Integers with A Missing Digit)

庫特·麻勒 (K.Mahler)*

令 n 爲一正整數，如以十進法表示之，其中每位數字均不等於零。設 N 爲此種 n 所成之集合，吾人熟知級數

$$\sigma = \sum_{n\varepsilon N} \frac{1}{n}$$

爲收斂者。其值 σ 是否一超越數，又是否可用平常函數表示之，爲相當困難之問題，作者未能解決之。本文中吾人將討論一較簡單之級數

$$f(z) = \sum_{n\varepsilon N} z^n,$$

此級數與 σ 有下列之關係

$$\sigma = \int_0^1 \frac{f(z)}{z} dz。$$

吾人將證明，當 z 爲一代數數(algebraic number)且 $0<|z|<1$ 時，$f(z)$ 以及其他類似之函數之值均爲超越數。

§1. 問題之陳述：設 $q\geq 2$ 爲一固定之整數，任何正整數 n 可用 q 進法以表示之如下：

$$n = h_0 + h_1 q + \cdots + h_r q^r = (h_0, h_1, \cdots, h_r),$$

其中 $h_0, \cdots, h_r$ 爲 0 與 $q-1$ 中之整數且 $h_r\neq 0$。當 $n=0$ 時，吾人可直書

$$0=(0)。$$

設 k 爲 $0,1,\cdots,q-1$ 中之一固定數字，令 $N(k)$ 表示所有適合下列條件之整數 n 所成之集合

$$n=(h_0, h_1, \cdots, h_r)\geq 0, \quad 0\leq h_\varrho \leq q-1, \; h_\varrho \neq k$$
$$(\varrho=0,1,\cdots,r)。$$

本文目的在討論 $N(k)$ 之產生函數

$$f_k(z) = \sum_{n\varepsilon N(k)} z^n$$

之性質。

§2. $f(z)$ 所適合之函數方程。顯然，$(1-z)^{-1}$ 爲 $f_k(z)$ 之長函數(majorizer, dominating function)

$$f_k(z) \ll (1-z)^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu。$$

因之，當 $|z|<1$ 時，$f_k(z)$ 所表之級數爲絕對收斂。此後吾人將假設 z 之絕對值恆小於一。

$f_k(z)$ 與 $f_k(z^q)$ 中有一簡單之關係，當 $k=0$ 或 $k\neq 0$ 時，略有不同，今分別討論之如下：

I. $k=0$. 設 $n=(h_0, \cdots, h_r)$ 屬於 $N(0)$，則有二種可能：(i) $r=0$, $n=h_0$, 故 n 爲 $1,2,\cdots,q-1$ 中之一整數；(ii) $r\geq 1$, n 可書爲下列和數

$$n=h_0+qn',$$

其中 $n'=(h_1, h_2, \cdots, h_r)\varepsilon N(0)$, $1\leq h_i\leq q-1$, $(i=0,1,\cdots,r)$。因之，吾人恆有

$$f_0(z) = \sum_{h_0=1}^{q-1} \left\{ z^{h_0} + \sum_{n'\varepsilon N(0)} z^{h_0+qn'} \right\}。$$

自此可得

$$\text{(I)} \qquad f_0(z) = \frac{z-z^q}{1-z}\left(1+f_0(z^q)\right)$$

II. $k=1,2,\cdots,q-1$。設 $n=(h_0,\cdots,h_r)$ 屬於 $N(k)$，則 n 可書爲下列和數

$$n=h_0+qn',$$

其中 h_0 爲 $0,1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,q-1$ 中之一數，且 $n'=(h_1,\cdots,h_r)\varepsilon N(k)$。顯然，吾人有

$$f_k(z) = \sum_{\substack{h_0=0 \\ h_0\neq k}}^{q-1} \sum_{n'\varepsilon N(k)} z^{h_0+qn'}$$

因之，$f_k(z)$ 適合

$$\text{(II)} \qquad f_k(z) = \left(\frac{1-z^q}{1-z} - z^k\right) f_k(z^q)。$$

函數方程 (I) 與 (II) 皆包含於下列式中

$$\text{(1)} \qquad f_k(z) = \left(\frac{1-z^q}{1-z} - z^k\right)\left(\varepsilon_k + f_k(z^q)\right)$$
$$(k=0,1,\cdots,q-1)$$

---

*作者麻勒博士，原籍德國，現任英國曼徹斯特大學講師。氏之數學工作，屬於數論方面，著述甚富，均有價值。氏生平崇拜中國文化，習中文，能作中文書札。本文係氏由英國投寄，原文爲英文，由王憲鈞君譯成中文。氏對我國科學之熱情與期望，殊足心感焉。——陳省身

其中

(2) $$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & 如\ k=0 \\ 0, & 如\ k\neq 0 \end{cases}$$

例:當 $q=2$ 時,吾人有

$$f_0(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{2^\nu-1}, \qquad f_1(z)=1,$$

$$f_0(z)=z+zf_0(z^2), \qquad f_1(z)=f_1(z^2)。$$

§3. $f_k(z)$ **之解析質**。設 $q\geqq 2$ 爲一任意整數,根據定義,吾人有

$$f_0(z)=z+z^2+\cdots+z^{q-1}+\cdots$$

$$f_k(z)=1+z+\cdots+z^{k-1}+z^{k+1}+\cdots$$

$$(k=1,2,\cdots,q-1),$$

因之

(3) $$\lim_{\nu\to\infty} f_k(z^{q^\nu})=1-\varepsilon_k \quad (k=0,1,\cdots,q-1)。$$

另一方面,自函數方程 (I) 與 (II) 可推出下列結果:

(4) $$f_0(z)=\frac{z-z^q}{1-z}+\frac{z-z^q}{1-z}\cdot\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q}+\frac{z-z^q}{1-z}\cdot\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q}\cdot\frac{z^{q^2}-z^{q^3}}{1-z^{q^2}}+\cdots\cdots+\frac{z-z^q}{1-z}\cdot\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q}\cdots\frac{z^{q^{\nu-1}}-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}\left(1+f_0(z^{q^\nu})\right),$$

(5) $$f_k(z)=\left(\frac{1-z^q}{1-z}-z^k\right)\left(\frac{1-z^{q^2}}{1-z^q}-z^{kq}\right)\cdots\left(\frac{1-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}-z^{kq^{\nu-1}}\right)f_k(z^{q^\nu})$$

$$(k=1,2,\cdots,q-1)$$

定理一:除 $q=2, k=1$ 特殊情形外,$f_k(z)$ 在單位圓內爲一分析函數 (analytic function),且以單位圓爲天然邊界(natural boundary)。

證明:設 k 與 λ 爲大於或等於零之整數,又設

$$\theta=e^{\frac{2\pi ki}{q^\lambda}}$$

爲一 q^λ 次之原始單位根(primitive q^λ-th root of unity)。當 $\lambda\geqq$ 時,多項式

$$\frac{z^{q^{\nu-1}}-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}, \quad \frac{1-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}-z^{kq^{\nu-1}}$$

$$(\nu=1,2,\cdots,\lambda)$$

之次數小於 q^ν。因之,當 $z=\theta$ 時,此二式均不等於零。此後吾人將 $q=2, k=1$ 一情形除外,則當 r 沿實軸自 0 至 1 時,顯然

(6) $$\lim_{r\to 1} f_k(r)=\infty。$$

根據 (4),(5),(6) 三式,以及 $\theta^{q^\lambda}=1$,吾人極易推得

$$\lim_{r\to 1} f_k(r\theta)=\infty。$$

在單位圓上,全部 θ 點造成一密集點集 (dense set),故此圓上每點均係異點 (singular point),明所欲證。

系:將 $q=2, k=1$ 一情形除外,則 $f_k(z)$ 恒爲 z 之超越函數[1]。

§4. $f_k(z)$ **之算術性質** 作者曾得一結果[2],其特殊情形可述之如下:

定理二:設 $q\geqq 2$ 爲一固定之整數,又設

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

爲一具有下列性質之冪級數:(i) a_ν 皆爲有理數;(ii) $F(z)$ 在 $z=0$ 之鄰近收斂;(iii) $f(z)$ 非 z 之代數函數 (algebraic function);(iv) $F(z)$ 適合

$$F(z^q)=\frac{a(z)F(z)+b(z)}{c(z)F(z)+d(z)}$$

其中 $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$ 爲 z 之多項式,且其係數均爲有理數,且 $\Delta(z)=a(z)d(z)-b(z)c(z)$ 不恒等於零。如 z 爲一代數數,且

$$0<|z|<1, \quad \Delta(z^{q^\nu})\neq 0 \quad (\nu=0,1,2,\cdots\cdots)$$

則 $F(z)$ 爲一超越數[3]。

當此函數 $F(z)$ 爲 $f_k(z)$ 時,吾人有

$$a(z)=1, \quad b(z)=-\frac{z-z^q}{1-z},$$

$$c(z)=0, \quad d(z)=\frac{z-z^q}{1-z},$$

或

$$a(z)=1, \quad b(z)=c(z)=0,$$

$$d(z)=\frac{1-z^q}{1-z}-z^k,$$

視 $k=0$ 或 $k\neq 0$ 而定。於是乃得

定理三:設 z 爲一代數數,當 $k=0$ 或 $k=1,2,\cdots, q-1$ 時,分別適合不等式

$$0<|z|<1$$

或

$$0<|z|<1,\ \frac{1-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}-z^{kq^{\nu-1}}\neq 0$$

$$(\nu=0,1,\cdots\cdots),$$

則 $f_k(z)$ 爲一超越數。另一方面，吾人恆有

$$f_k(0)=1-\epsilon_k\ \ (k=0,1,\cdots,q-1)。$$

又如 $k=1,2,\cdots,q-1,\ 0<|z|<1$，且有 $\nu(=0,1,2,\cdots)$ 存在使

$$\frac{1-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}-z^{kq^{\nu-1}}=0,$$

則 $f_k(z)=0$。

§5. $f_k(z)$ 之零點。令

$$\varphi_k(z)=\frac{1-z^q}{1-z}-z^k\quad(k=1,2,\cdots,q-1),$$

則吾人有恆等式

(7) $$\varphi_k\left(\frac{1}{z}\right)=z^{-(q-1)}\ \varphi_{q-k-1}(z)。$$

今將討論 $\varphi_k(z)$ 之零點 ζ。設此全體零點中，有 $\mu(k)$ 個 ζ 其絕對值小於一，又有 $\nu(k)$ 個 ζ 其絕對值等於一。自下列二式

$$\varphi_{q-1}(z)=1+z+\cdots+z^{q-2}\quad(\text{任意之 } q)$$

$$\varphi_{\frac{q-1}{2}}(z)=(1+z+\cdots+z^{\frac{q-3}{2}})(1+z^{\frac{q+1}{2}})$$

（q 爲奇數）

吾人知，當 $k=q-1$ 或 $k=\frac{q-1}{2}$ 爲一整數時，

$$\mu(k)=0。$$

又自 (7) 式，可得

(8) $$\nu(k)=\nu(q-k-1)。$$

定理四：設 k 爲適合 $1\leq k\leq q-2$ 之整數，且 $k\neq\frac{q-1}{2}$，則 $\mu(k)>0$。

證明：$\varphi_k(z)$ 爲一 $q-1$ 次多項式，故吾人只需證明 $\nu(k)<q-1$ 即可，所有 $\varphi_k(z)$ 之零點之乘積爲 ±1；因之，如零點中有絕對值不等於一者，則必有一零點，其絕對值小於一。

根據(8)式，吾人僅需討論下列情形

(9) $$k=1,2,\cdots,\left[\frac{q-2}{2}\right]。$$

在單位圓上，$\varphi_k(z)$ 無多重零點(multiple zero)。因否則

$$1-z^q-z^k+z^{k+1}=0,$$
$$qz^{q-1}+kz^{k-1}-(k+1)z^k=0,$$

於是乃有

$$(q-k)z^q=z^{k+1}-k,$$

故

$$q-k\leq k+1,\qquad k\geq\frac{q-1}{2},$$

此與假設衝突。

設 $\zeta=e^{\alpha i}$ $(0<\alpha<2\pi)$ 爲

$$\varphi_k(z)=(1+z+\cdots+z^{q-1}-z^k)$$

在單位圓上之一零點。因

$$z^{-\frac{q-1}{2}}\varphi_k(z)=\frac{z^{\frac{q}{2}}-z^{-\frac{q}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}}-z^{-\frac{q-2k-1}{2}}$$

故 ζ 適合下列方程

$$\frac{\sin\frac{q\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\cos\frac{q-2k-1}{2}\alpha-i\sin\frac{q-2k-1}{2}\alpha。$$

因之，

$$\sin\frac{q-2k-1}{2}\alpha=0,$$

故

$$\alpha=\frac{2n\pi}{q-2k-1}$$

其中 n 爲 $1,2,\cdots,q-2k-1$ 中之一數。但 $q-2k-1<q-1$，於是 $\nu(k)<q-1$。

總集本節結果，吾人有

定理五：當 $k=0$，或 $k=q-1$，或 $k=\frac{q-1}{2}$ 爲一整數時，$f_k(z)$ 在單位圓內無零點；在其他情形時，$f_k(z)$ 有無窮多零點，且此零點皆爲代數數。

曼徹斯特大學數學系。1946 年 11 月 30 日。

註

1) 自(3),(4),(5)極易得

$$f_0(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{z-z^q}{1-z}\cdot\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q}\cdots\frac{z^{q^{\nu-1}}-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}},$$

$$f_k(z)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}-z^{kq^{\nu-1}}\right)$$

$$(k=1,2,\cdots,q-1)。$$

當吾人討論 $f_k(z)$ 在單位圓上之性質時，此方程頗爲重要。

2) Math. Ann., 101(1929), 332−360。

3) 尚可證明 F (z) 非一利物威數 (Liouville number)。

ON THE GENERATING FUNCTION OF THE INTEGERS WITH A MISSING DIGIT

By K. MAHLER

Let n be a positive integer such that no digit in its decimal representation is equal to zero, and let N be the set of all such integers n. It is well known that the series

$$\sigma = \sum_{n \varepsilon N} 1/n$$

converges. Whether its value σ is a transcendental number, or whether it can be expressed by means of elementary transcendental functions, is, however, a difficult question. In this note, I shall dicuss the related series

$$f(z) = \sum_{n \varepsilon N} z^n$$

with which σ is connected by the relation

$$\sigma = \int_0^1 \frac{f(z)}{z} dz.$$

I shall prove that if z is an algebraic number such that

$$0 < |z| < 1,$$

then $f(z)$ is a transcendental number; and a similar result holds for infinitely many similar functions.

1. The problem. Let $q \geqslant 2$ be a fixed positive integer. Every non-negative integer n can be written in a unique way as a q-adic sum

$$n = h_0 + h_1 q + \ldots + h_r q^r = (h_0, h, \ldots, h_r),$$

where $h_0, h_1 \ldots, h_r$ are integers $0, 1, \ldots, q-1$, and where, in particular, $h_r \neq 0$. For $n = 0$, we write $0 = (0)$. Let

This paper is the translation of one which appeared originally in the Chinese journal *K'o Hsueh* (Science), Vol. 29, (1947), p. 265-267, under the title 'Mou Chung T'e Pieh Cheng Shu Jih Ch'an Sheng Han Shu'.

Received January 3, 1951.

k be a fixed one of the integers $0, 1, \ldots, q-1$, and let $N(k)$ be the set of all those integers $n \geqslant 0$ whose digits h_ρ are all different from k,

$n = (h_0, h_1, \ldots, h_r) \geqslant 0,\ 0 \leqslant h_\rho \leqslant q-1,\ h_\rho \neq k\ (\rho = 0, 1, \ldots, r)$.

We shall study here the properties of the generating function

$$f_k(z) = \sum_{n \in N(k)} z^n$$

of $N(k)$.

2. The functional equation for $f_k(z)$. It is clear that $f_k(z)$ is majorized by the series $1+z+z^2+\ldots=(1-z)^{-1}$ and so converges absolutely for $|z| < 1$.

There exists a functional equation between $f_k(z)$ and $f_k(z^q)$ which takes different forms for $k = 0$ and for $k \neq 0$.

I. $k = 0$. If $n = (h_0, h_1, \ldots, h_r)$ belongs to $N(0)$, then the following two cases arise:

(*i*) $r = 0$, $n = h_0$, so that n is one of the integers $1, 2, \ldots, q-1$.

(*ii*) $r \geqslant 1$, so that n can be written as $n = h_0 + qn'$ where $1 \leqslant h_0 \leqslant q-1$, $n' = (h_1, h_2, \ldots, h_r) \in N(0)$. Therefore

$$f_0(z) = \sum_{h_0=1}^{q-1} \Big\{ z^{h_0} + \sum_{n' \in N(0)} z^{h_0+qn'} \Big\},$$

so that

$$f_0(z) = \frac{z-z^q}{1-z}(1+f_0(z^q)). \qquad \text{(I)}$$

II. $k = 1, 2, \ldots, q-1$. If n belongs to $N(k)$, then we can write

$$n = (h_0, h_1, \ldots, h_r) = h_0 + qn'$$

where h_0 is one of the integers $0, 1, 2, \ldots, k-1; k+1, \ldots, q-1$, and where

$$n' = (h_1, h_2, \ldots h_r) \in N(k).$$

It is now clear that

$$f_k(z) = \sum_{\substack{h_0=0 \\ h_0 \neq k}}^{q-1} \sum_{n' \in N(k)} z^{h_0+qn'},$$

whence

$$f_k(z) = \Big(\frac{1-z^q}{1-z} - z^k\Big) f_k(z^q). \qquad \text{(II)}$$

The functional equations (I) and (II) may be combined into the one equation

$$f_k(z) = \Big(\frac{1-z^q}{1-z} - z^k\Big)(\varepsilon_k + f_k(z^q)) \quad (k = 0, 1, \ldots, q-1), \qquad (1)$$

where $\varepsilon_k = 1$ if $k = 0$, and $\varepsilon_k = 0$ if $k = 1, 2, \ldots, q-1$. In the simplest case $q = 2$, we have

$$f_0(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{2^\nu - 1}, \qquad f_0(z) = z + z f_0(z^2),$$

$$f_1(z) = 1 \quad , \qquad f_1(z) = f_1(z^2).$$

3. The analytic behaviour of $f_k(z)$. It is clear from the definition that

$$f_0(z) = z + z^2 + \ldots + z^{q-1} + \ldots,$$

$$f_k(z) = 1 + z + \ldots + z^{k-1} + z^{k+1} + \ldots \quad (k = 1, \ldots, q-1),$$

whence, for $|z| < 1$,

$$\lim_{\nu \to \infty} f_k(z^{q^\nu}) = 1 - \varepsilon_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, q-1). \qquad (2)$$

We further deduce from the functional equations (I) and (II) that

$$f_0(z) = \frac{z-z^q}{1-z} + \frac{z-z^q}{1-z}\,\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q} + \ldots + \frac{z-z^q}{1-z}\,\frac{z^q-z^{q^2}}{1-z^q} \cdots \frac{z^{q^{\nu-1}}-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}}(1+f_0(z^{q^\nu})), \qquad (3)$$

and

$$f_k(z) = \Big(\frac{1-z^q}{1-z} - z^k\Big)\Big(\frac{1-z^{q^2}}{1-z^q} - z^{kq}\Big) \cdots \times \Big(\frac{1-z^{q^\nu}}{1-z^{q^{\nu-1}}} - z^{kq^{\nu-1}}\Big) f_k(z^{q^\nu}), \ (k = 1, 2, \ldots, q-1). \qquad (4)$$

THEOREM 1. *If the special case $q = 2$, $k = 1$ is excluded, then $f_k(z)$ is regular inside the unit circle and has this circle as its natural boundary.*

PROOF. Let κ and λ be two non-negative integers; put

$$\theta = e^{\frac{2\pi i\kappa}{q^\lambda}}.$$

Assume that κ is prime to q so that θ is a primitive q^λ-th root of unity. It is obvious that for $\lambda \geqslant 1$ none of the polynomials

$$\frac{z^{q^{\nu-1}} - z^{q^\nu}}{1 - z^{q^{\nu-1}}}, \quad \frac{1 - z^{q^\nu}}{1 - z^{q^{\nu-1}}} - z^{kq^{\nu-1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

in z vanishes if $z = \theta$. On the other hand, if the case $q = 2$, $k = 1$ is excluded, then evidently

$$\lim_{r \to 1} f_k(r) = +\infty \tag{5}$$

as r tends to 1 along the real interval $0 \leqslant r < 1$. But then, by $\theta^{q^\lambda} = 1$, from (3), (4), and (5), also

$$\lim_{r \to 1} f_k(\theta r) = \infty.$$

Now the points θ are everywhere dense on the unit circle, and the assertion follows at once.

COROLLARY. *Except for the case $q = 2$, $k = 1$, $f_k(z)$ is a transcendental function of z.*

4. The arithmetic behaviour of $f_k(z)$. Some twenty years ago, I proved a result in which the following theorem is contained as a special case [*Mathematische Annalen*, 101 (1929), 332-366].

THEOREM 2. *Let $q \geqslant 2$ be a fixed integer, and let*

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

be a power series with the following properties:

(i) *All a_ν are rational numbers.*

(ii) *$F(z)$ converges in a neighbourhood of $z = 0$.*

(iii) *$F(z)$ is not an algebraic function of z.*

(iv) *$F(z)$ satisfies a functional equation of the form*

$$F(z^q) = \frac{a(z)F(z) + b(z)}{c(z)F(z) + d(z)},$$

where $a(z)$, $b(z)$, $c(z)$, $d(z)$ are polynomials with rational coefficients such that $\Delta(z) = a(z)\,d(z) - b(z)\,c(z)$ does not vanish identically in z. Then if z is an algebraic number satisfying

$$0 < |z| < 1, \quad \Delta(z^{q^\nu}) \neq 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$F(z)$ is a transcendental number, but not a Liouville number.

If we apply this theorem to $F(z) = f_k(z)$, then

$$a(z) = 1,\ b(z) = -\frac{z - z^q}{1 - z},\ c(z) = 0,\ d(z) = \frac{z - z^q}{1 - z},$$

or

$$a(z) = 1,\ b(z) = c(z) = 0,\ d(z) = \frac{1 - z^q}{1 - z} - z^k,$$

according as to whether $k = 0$ or $1 \leqslant k \leqslant q - 1$. We therefore obtain the following result.

THEOREM 3. *Let the case $q = 2$, $k = 1$ be excluded. If z is an algebraic number which satisfies the inequality*

$$0 < |z| < 1 \qquad \textit{for } k = 0,$$

and the inequalities

$$0 < |z| < 1, \quad \frac{1 - z^{q^\nu}}{1 - z^{q^{\nu-1}}} - z^{kq^{\nu-1}} \neq 0 \ (\nu = 1, 2, \ldots) \textit{ for } 1 \leqslant k \leqslant q - 1,$$

then $f_k(z)$ is a transcendental number, but not a Liouville number. Furthermore

$$f_k(0) = 1 - \varepsilon_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, q-1),$$

and if $k = 1, 2, \ldots, q-1$, $0 < |z| < 1$ and there is a $\nu = 1, 2, \ldots$, such that

$$\frac{1-z}{1-z^{q^{\nu-1}}} - z^{kq^{\nu-1}} = 0,$$

then $f_k(z) = 0$.

5. The zeros of $f_k(z)$. The polynomials

$$\phi_k(z) = \frac{1-z^q}{1-z} - z^k \qquad (k = 1, 2, \dots, q-1)$$

satisfy the functional equations

$$\phi_k(1/z) = z^{-(q-1)}\phi_{q-k-1}(z). \tag{6}$$

Let us assume that $\phi_k(z)$ has $\mu(k)$ zeros of absolute value less than 1, and $\nu(k)$ zeros of absolute value equal to 1. From

$$\phi_{q-1}(z) = 1+z+z^2+\dots+z^{q-2} \qquad (q \text{ arbitrary}),$$
$$\phi_{(q-1)/2}(z) = (1+z+\dots+z^{(q-3)/2})(1+z^{(q+1)/2}) \qquad (q \text{ odd}),$$

it is clear that

$$\mu(k) = 0 \text{ if } k = q-1, \text{ or if } k = (q-1)/2.$$

Further from (6),

$$\nu(k) = \nu(q-k-1). \tag{7}$$

THEOREM 4. *Let* $1 \leqslant k \leqslant q-2$ *and* $k \neq (q-1)/2$. *Then* $\mu(k) > 0$.

PROOF. The polynomial $\phi_k(z)$ is of exact degree $q-1$; it suffices therefore to prove that $\nu(k) < q-1$. For the product of the zeros of $\phi_k(z)$ is evidently equal to ∓ 1: hence if at least one zero is of absolute value different from 1, then there is also at least one zero of absolute value less than 1.

Since $k \neq (q-1)/2$, it suffices to prove this inequality for $\nu(k)$ if

$$k = 1, 2, \dots, [(q-2)/2].$$

We first note that $\phi_k(z)$ has no multiple zeros on the unit circle. For at such zeros,

$$1-z^q-z+z^{k+1} = 0, \quad qz^{q-1}+kz^{k-1}-(k+1)z^k = 0,$$

therefore

$$(q-k)z^q = z^{k+1}-k,$$

whence, by $|z| = 1$,

$$q-k \leqslant k+1, \quad k \geqslant (q-1)/2,$$

contrary to hypothesis.

Denote by

$$\zeta = e^{\alpha i}, \text{ where } 0 < \alpha < 2\pi,$$

a zero, hence a simple zero, of

$$\phi_k(z) = 1+z+\dots+z^{q-1}-z^k$$

on the unit circle. Since

$$z^{-\frac{q-1}{2}}\phi_k(z) = \frac{z^{\frac{q}{2}}-z^{-\frac{q}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}} - z^{-\frac{q-2k-1}{2}},$$

necessarily

$$\frac{\sin q\alpha/2}{\sin \alpha/2} = \cos\frac{q-2k-1}{2}\alpha - i\sin\frac{q-2k-1}{2}\alpha,$$

and so

$$\sin\frac{q-2k-1}{2}\alpha = 0.$$

Hence

$$\alpha = \frac{2n\pi}{q-2k-1},$$

where n is one of the integers $1, 2, \dots, q-2k-1 < q-1$. From this the assertion $\nu(k) < q-1$ follows at once.

Let us combine the last results. We have found:

THEOREM 5. *If* $k = q-1$, *or* $k = (q-1)/2$, *then* $f_k(z)$ *has no zeros inside the unit circle. If* $k = 0$, *then* $f_0(z)$ *has the algebraic zero* $z = 0$, *and all its possible other zeros are transcendental. In all other cases, the zeros of* $f_k(z)$ *are algebraic numbers, and there are an infinity of them inside the unit circle.*

In a similar way, the generating function of integers with more than one missing digit, or with a missing sequence of digits can be investigated.

Manchester University, England.