Caminando guiado por π

Francisco J. Aragón Artacho
trabajo conjunto con David Bailey, Jonathan Borwein y Peter Borwein

CARMA

School of Mathematical & Physical Sciences
The University of Newcastle, Australia

Universidad Miguel Hernández

Elche, 26 de abril 2013

THE UNIVERSITY OF NEWCASTLE AUSTRALIA

Contenido

Contenido

Introducción

- Los dígitos de $\pi, e, \sqrt{2}$ parecen ser “aleatorios”:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937 5\ldots$$
$$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369 9\ldots$$
$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420969807856967187537 6\ldots$$

¿Lo son?

Introducción

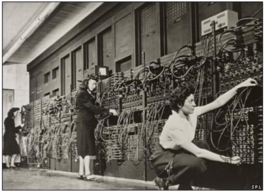
- Los dígitos de $\pi, e, \sqrt{2}$ parecen ser “aleatorios”:

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937 5\ldots$$
$$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369 9\ldots$$
$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420969807856967187537 6\ldots$$

¿Lo son?

- En 1949 John von Neumann utiliz el primer computador ENIAC para calcular 2.037 dígitos de π con el objetivo de estudiar la distribución de sus dígitos (y de los de e).

John von Neumann



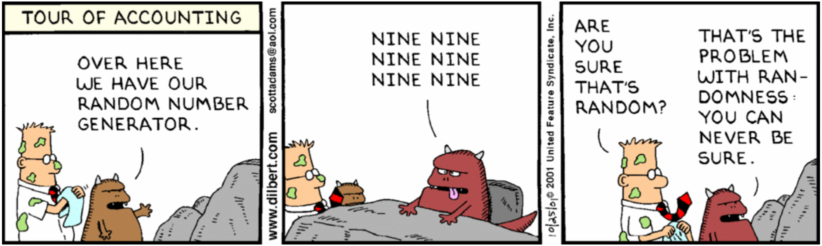
ENIAC

¿Son los dígitos de π aleatorios?

Dígito	Frecuencia
0	99.993.942
1	99.997.334
2	100.002.410
3	99.986.911
4	100.011.958
5	99.998.885
6	100.010.387
7	99.996.061
8	100.001.839
9	100.000.273
Total	1.000.000.000

Tabla : Conteo de los primeros mil millones de dígitos de π.

¿Qué significa “aleatorio”?



Números normales

Definition

Un número real α es b-normal si, dado cualquier entero $b \geq 2$, cada cadena de longitud m de dígitos en base b aparece en la expansión en base b de α con una frecuencia límite de $1/b^m$.

Números normales

Definition

Un número real α es b-normal si, dado cualquier entero $b \geq 2$, cada cadena de longitud m de dígitos en base b aparece en la expansión en base b de α con una frecuencia límite de $1/b^m$.

- Dado cualquier entero $b \geq 2$, casi todos los números reales, en el sentido de la teoría de la medida, son b-normales.

Números normales

Definition

Un número real α es b-normal si, dado cualquier entero $b \geq 2$, cada cadena de longitud m de dígitos en base b aparece en la expansión en base b de α con una frecuencia límite de $1/b^m$.

- Dado cualquier entero $b \geq 2$, casi todos los números reales, en el sentido de la teoría de la medida, son b-normales.
- Es más, casi todos los números reales son b-normales simultáneamente en todas las bases (lo que se denomina "absolutamente normal").

Números normales

Definition

Un número real α es b-normal si, dado cualquier entero $b \geq 2$, cada cadena de longitud m de dígitos en base b aparece en la expansión en base b de α con una frecuencia límite de $1/b^m$.

- Dado cualquier entero $b \geq 2$, casi todos los números reales, en el sentido de la teoría de la medida, son b-normales.
- Es más, casi todos los números reales son b-normales simultáneamente en todas las bases (lo que se denomina "absolutamente normal").
- Por desgracia ha sido muy difícil probar normalidad de números concretos en una base b, y mucho más demostrar que un número lo es en todas las bases simultáneamente.

Números normales

Definition

Un número real α es b-normal si, dado cualquier entero $b \geq 2$, cada cadena de longitud m de dígitos en base b aparece en la expansión en base b de α con una frecuencia límite de $1/b^m$.

- La primera constante que se demostró que es 10-normal es:

$$C_{10} := 0,12345678910111213141516 1718\ldots$$

Fue probado por David G. Champernowne in 1933.
C_{10} es llamada la constante de Champernowne.

Números normales

Definition

Un número real α es b-normal si, dado cualquier entero $b \geq 2$, cada cadena de longitud m de dígitos en base b aparece en la expansión en base b de α con una frecuencia límite de $1/b^m$.

- La primera constante que se demostró que es 10-normal es:

$$C_{10} := 0,123456789101112131415161718\ldots$$

  Fue probado por David G. Champernowne in 1933.
  C_{10} es llamada la constante de Champernowne.

- Arthur H. Copeland y Paul Erdős probaron en 1946 que también es cierto si se concatenan la sucesión de números primos:

$$CE(10) := 0.23571113171923293137414347\ldots \text{ es 10-normal.}$$

  $CE(10)$ es llamada la constante de Copeland–Erdős.

Números normales

Definition

Un número real α es b-normal si, dado cualquier entero $b \geq 2$, cada cadena de longitud m de dígitos en base b aparece en la expansión en base b de α con una frecuencia límite de $1/b^m$.

- La primera constante que se demostró que es 10-normal es:

$$C_{10} := 0,123456789101112131415161718\ldots$$

  Fue probado por David G. Champernowne in 1933.
  C_{10} es llamada la constante de Champernowne.

- Arthur H. Copeland y Paul Erdős probaron en 1946 que también es cierto si se concatenan la sucesión de números primos:

$$CE(10) := 0.23571113171923293137414347\ldots \text{ es 10-normal.}$$

  $CE(10)$ es llamada la constante de Copeland–Erdős.

- Actualmente no existe ninguna prueba de normalidad para $\pi, e, \log 2$ ni $\sqrt{2}$.

¿Es π 10-normal?

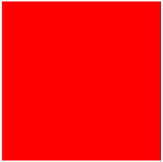
Cadena	Frecuencia	Cadena	Frecuencia	Cadena	Frecuencia
0	99.993.942	00	10.004.524	000	1.000.897
1	99.997.334	01	9.998.250	001	1.000.758
2	100.002.410	02	9.999.222	002	1.000.447
3	99.986.911	03	10.000.290	003	1.001.566
4	100.011.958	04	10.000.613	004	1.000.741
5	99.998.885	05	10.002.048	005	1.002.881
6	100.010.387	06	9.995.451	006	999.294
7	99.996.061	07	9.993.703	007	998.919
8	100.001.839	08	10.000.565	008	999.962
9	100.000.273	09	9.999.276	009	999.059
		10	9.997.289	010	998.884
		11	9.997.964	011	1.001.188
		⋮	⋮	⋮	⋮
		99	10.003.709	099	999.201
				⋮	⋮
				999	1.000.905
TOTAL	1.000.000.000	TOTAL	1.000.000.000	TOTAL	1.000.000.000

Tabla : Conteo de los primeros mil millones de dígitos de π.

Contenido

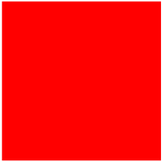
¿Qué es un camino aleatorio?

Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$



¿Qué es un camino aleatorio?

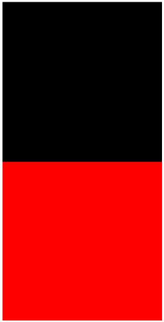
Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$



$$1 = \uparrow$$

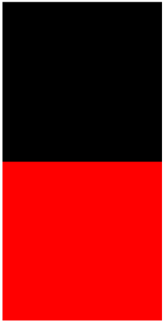
¿Qué es un camino aleatorio?

Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0=\rightarrow$, $1=\uparrow$, $2=\leftarrow$, $3=\downarrow$



¿Qué es un camino aleatorio?

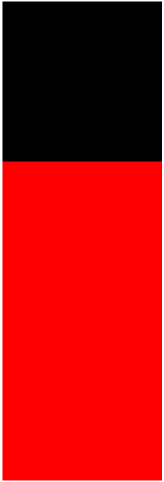
Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$



$$1 = \uparrow$$

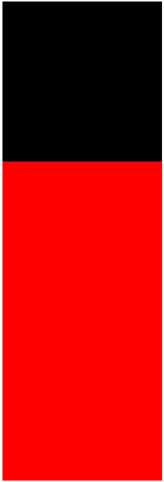
¿Qué es un camino aleatorio?

Elegir un número aleatorio entre $\{0, 1, 2, 3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$



¿Qué es un camino aleatorio?

Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$



$$2 = \leftarrow$$

¿Qué es un camino aleatorio?

Elegir un número aleatorio entre $\{0, 1, 2, 3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$

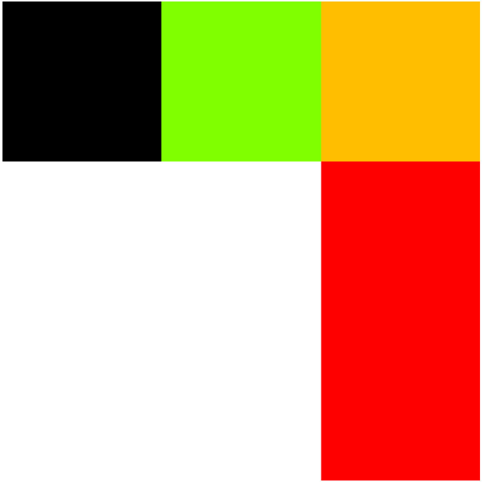
¿Qué es un camino aleatorio?

Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0=\rightarrow$, $1=\uparrow$, $2=\leftarrow$, $3=\downarrow$

$$2=\leftarrow$$

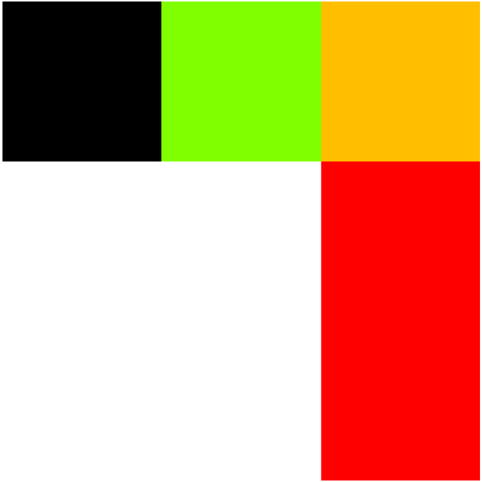
¿Qué es un camino aleatorio?

Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$



¿Qué es un camino aleatorio?

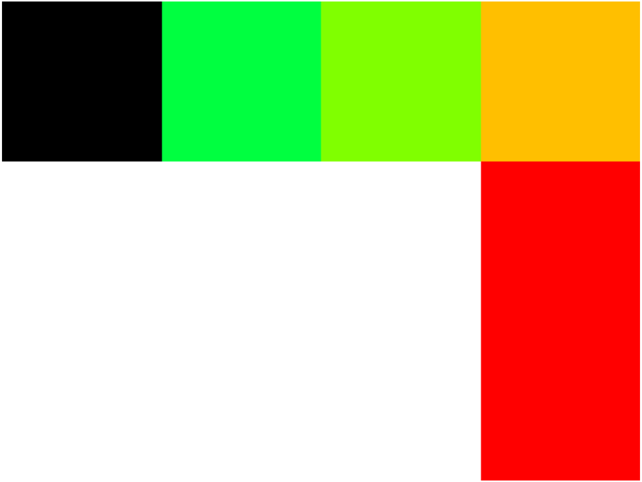
Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$



$$2 = \leftarrow$$

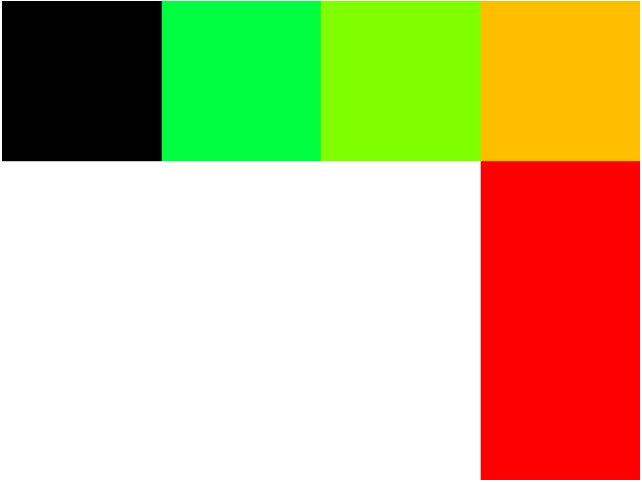
¿Qué es un camino aleatorio?

Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0=\rightarrow$, $1=\uparrow$, $2=\leftarrow$, $3=\downarrow$



¿Qué es un camino aleatorio?

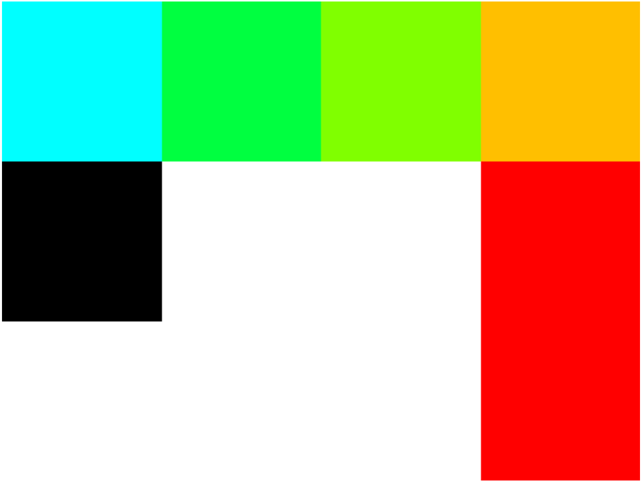
Elegir un número aleatorio entre $\{0, 1, 2, 3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$



$$3 = \downarrow$$

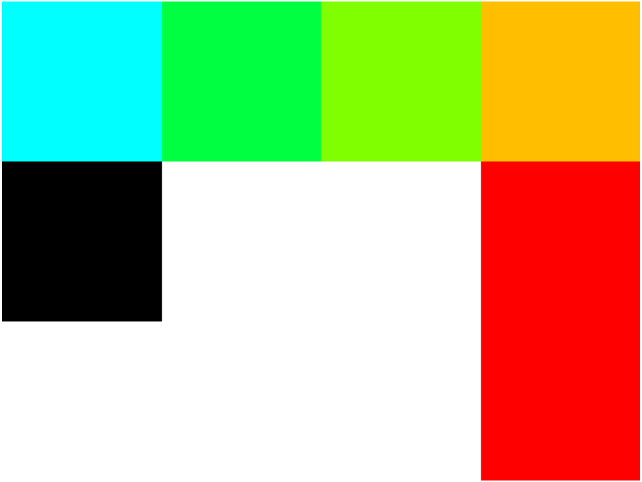
¿Qué es un camino aleatorio?

Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0=\rightarrow$, $1=\uparrow$, $2=\leftarrow$, $3=\downarrow$



¿Qué es un camino aleatorio?

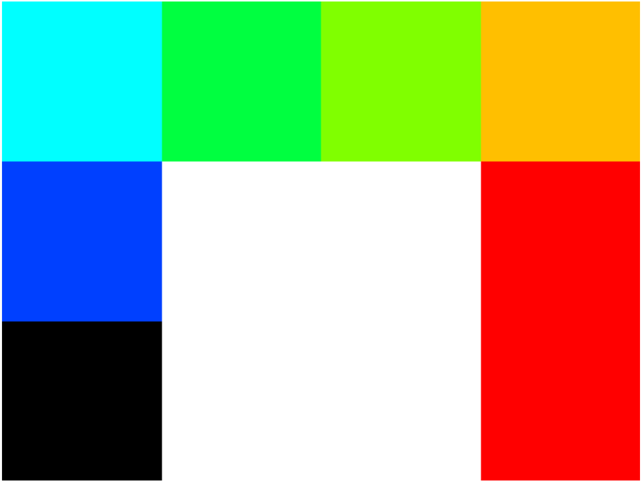
Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$



$$3 = \downarrow$$

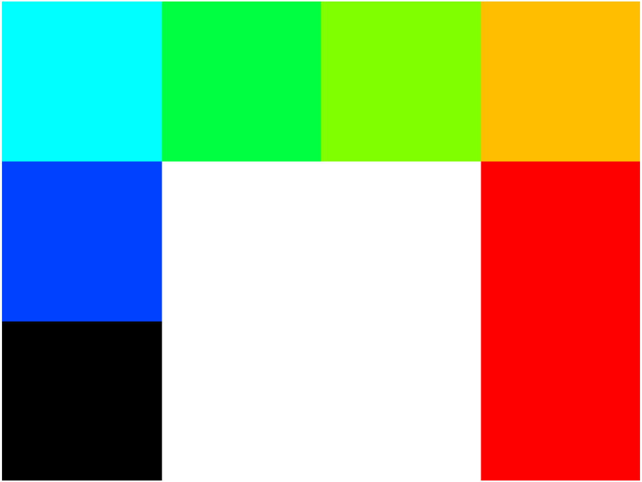
¿Qué es un camino aleatorio?

Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$



¿Qué es un camino aleatorio?

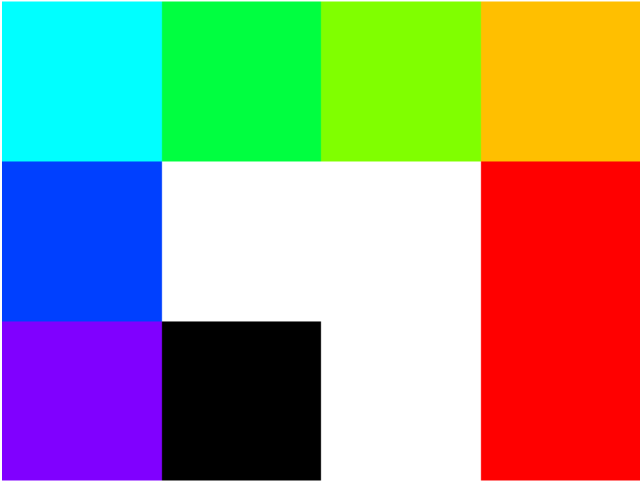
Elegir un número aleatorio entre $\{0, 1, 2, 3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$



$$0 = \rightarrow$$

¿Qué es un camino aleatorio?

Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0=\rightarrow$, $1=\uparrow$, $2=\leftarrow$, $3=\downarrow$



$$11222330$$

¿Qué es un camino aleatorio?

Elegir un número aleatorio entre $\{0,1,2,3\}$ y moverse $0 = \rightarrow$, $1 = \uparrow$, $2 = \leftarrow$, $3 = \downarrow$

Figura : Un camino pseudoaleatorio en base-4 de un millón de pasos.

Los caminos aleatorios son muy parecidos

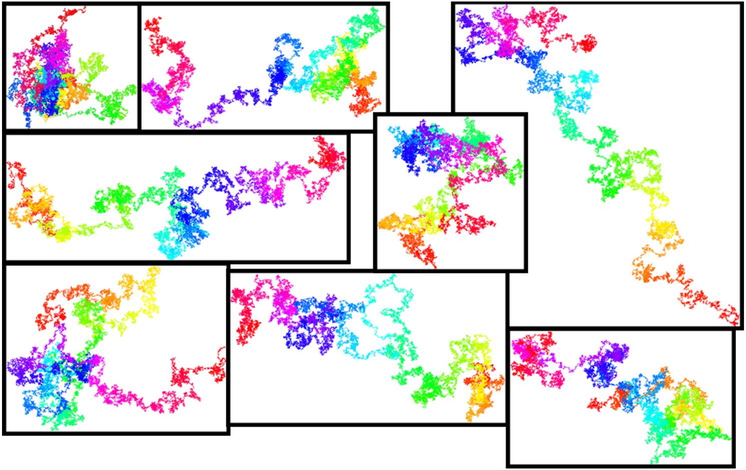


Figura : Ocho caminos (pseudo)aleatorios[2] de un millón de pasos en base-4.

[2]Python usa como generador de números pseudoaleatorios el Mersenne Twister, que tiene un periodo de $2^{19937} - 1 \approx 10^{6002}$.

Caminos aleatorios en base-b

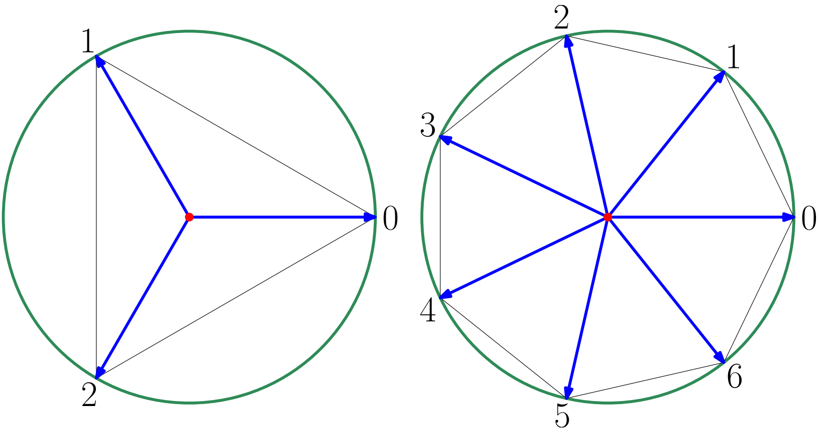


Figura : Direcciones para caminos aleatorios en base-3 y base-7.

Contenido

Dos números racionales

```
Q1=
1049012271677499437486619280565448601617567358491560876166848380843
1443584472528755516292470277595555704537156793130587832477297720217
7081818796590637365767487981422801328592027861019258140957135748704
7122902674651513128059541953997504202061380373822338959713391954
/
1612226962694290912940490066273549214229880755725468512353395718465
1913530173488143140175045399694454793530120643833272670970079330526
2920303509209736004509554561365966493250783914647728401623856513742
9529453089612268152748875615658076162410788075184599421938774835

Q2=
7278984857066874130428336124347736557760097920257997246066053320967
1510416153622193809833373062647935595578496622633151106310912260966
7568778977976821682512653537303069288477901523227013159658247897670
30435402490295493942131091063934014849602813952
/
1118707184315428172047608747409173378543817936412916114431306628996
5259377090978187244251666337745459152093558288671765654061273733231
7877736113382974861639142628415265543797274479692427652260844707187
532155254872952853725026318685997495262134665215
```

Dos números racionales

La expansión en base-4 de $Q1$ y $Q2$ es:

```
Q1=
0.2212210122321212001221012231210012221000112321231210001222100012221000122210001222100001222100012220110301012201001201031103333333333
3333333333333330111111111111111111111111111110010000000003003003200320032003022300032220300032223000302222030003222300032223000322230003222300032
2232000023222300032223003222133002332123302321323211211212122232323333303000001000323003230032203032030110333011103301103101111011332333
3232322321221211211121122322222122...
```

```
Q2=
0.2212210122321212001221012231210012221000112321231210001222100012221000122210001222100001222100012220110301012201001201031103333333333
3333333333333330111111111111111111111111111110010000000003003003200320032003022300032220300032223000302222030003222300032223000322230003222300032
2232000023222300032223003222133002332123302321323211211212122232323333303000001000323003230032203032030110333011103301103101111011000000
000000...
```

Dos números racionales

Figura : Caminos basados en los números $Q1$ (arriba) y $Q2$ (abajo).

Otro par de números racionales

Los siguientes números racionales [G. Marsaglia, 2010]

$$Q3 = \frac{3624360069}{7000000001} \quad \text{and} \quad Q4 = \frac{123456789012}{1000000000061},$$

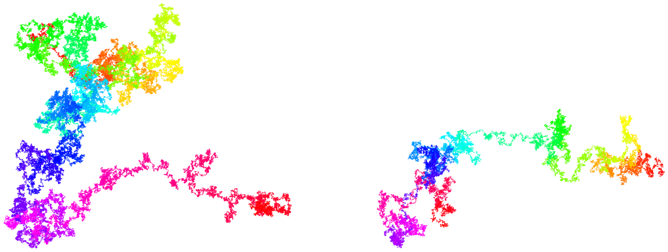
tienen un periodo en base-10 de 1.750.000.000 y 1.000.000.000.060 dígitos, respectivamente.

Otro par de números racionales

Los siguientes números racionales [G. Marsaglia, 2010]

$$Q3 = \frac{3624360069}{7000000001} \quad \text{and} \quad Q4 = \frac{123456789012}{1000000000061},$$

tienen un periodo en base-10 de 1.750.000.000 y 1.000.000.000.060 dígitos, respectivamente.



(a) $Q3$ (b) $Q4$

Figura : Caminos basados en el primer millón de dígitos en base-10 de los racionales $Q3$ y $Q4$.

Caminos basados en los dígitos de números

Figura : Un camino basado en los primeros 10 millones de dígitos en base-4 de π.

Caminos basados en los dígitos de números

Colorados por el número de "visitas"

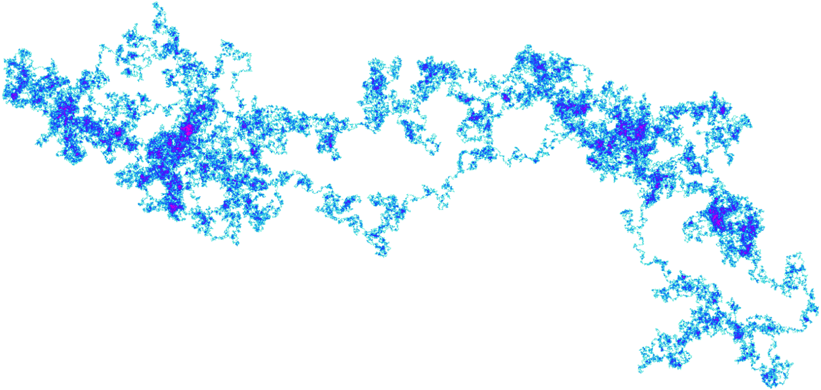


Figura : Camino basado en los primeros 100 millones de dígitos en base-4 de π coloreado por el número de retornos.

Contenido

Los números de Stoneham

Richard G. Stoneham probó en 1973 que las siguientes constantes

$$\alpha_{b,c} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n b^{c^n}},$$

son b-normales para números relativamente primos b, c bajo ciertas condiciones. Las constantes $\alpha_{b,c}$ son conocidas como números de Stoneham.

Los números de Stoneham

Richard G. Stoneham probó en 1973 que las siguientes constantes

$$\alpha_{b,c} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n b^{c^n}},$$

son b-normales para números relativamente primos b, c bajo ciertas condiciones. Las constantes $\alpha_{b,c}$ son conocidas como números de Stoneham.

Teorema (Normalidad de los núm. de Stoneham, Bailey–Crandall '02)

Para cualquier par de enteros coprimos $b \geq 2$ y $c \geq 2$, la constante $\alpha_{b,c}$ es b-normal.

Los números de Stoneham

Richard G. Stoneham probó en 1973 que las siguientes constantes

$$\alpha_{b,c} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n b^{c^n}},$$

son b-normales para números relativamente primos b, c bajo ciertas condiciones. Las constantes $\alpha_{b,c}$ son conocidas como números de Stoneham.

Teorema (Normalidad de los núm. de Stoneham, Bailey–Crandall '02)

Para cualquier par de enteros coprimos $b \geq 2$ y $c \geq 2$, la constante $\alpha_{b,c}$ es b-normal.

Teorema (No normalidad de los números de Stoneham, Bailey–Borwein '12)

Dados dos números coprimos $b \geq 2$ y $c \geq 2$, tales que $c < b^{c-1}$, la constante $\alpha_{b,c}$ no es bc-normal.

Los números de Stoneham

Richard G. Stoneham probó en 1973 que las siguientes constantes

$$\alpha_{b,c} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^n b^{c^n}},$$

son b-normales para números relativamente primos b, c bajo ciertas condiciones. Las constantes $\alpha_{b,c}$ son conocidas como números de Stoneham.

Teorema (Normalidad de los núm. de Stoneham, Bailey–Crandall '02)

Para cualquier par de enteros coprimos $b \geq 2$ y $c \geq 2$, la constante $\alpha_{b,c}$ es b-normal.

Teorema (No normalidad de los números de Stoneham, Bailey–Borwein '12)

Dados dos números coprimos $b \geq 2$ y $c \geq 2$, tales que $c < b^{c-1}$, la constante $\alpha_{b,c}$ no es bc-normal.

- Como $3 < 2^{3-1}$, ¡¡la constante $\alpha_{2,3}$ es 2-normal y no es 6-normal!!

Los números de Stoneham

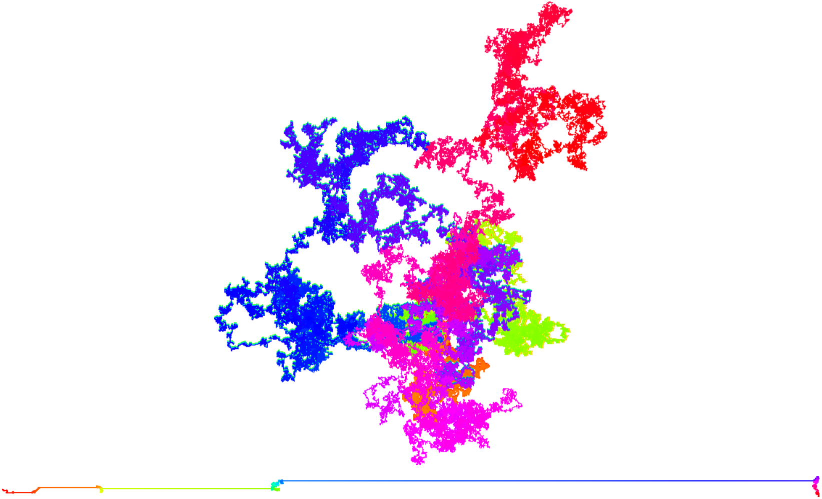


Figura : $\alpha_{2,3}$ es 2-normal (arriba) y no es 6-normal (abajo).

Los números de Stoneham

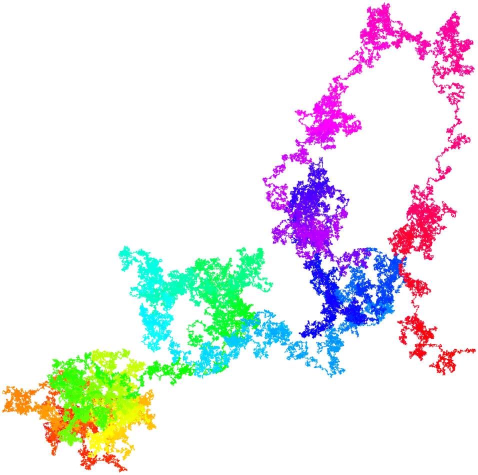


Figura : ¿Es $\alpha_{2,3}$ 3-normal?

Contenido

La distancia esperada al origen

Teorema

La distancia esperada al origen de un camino aleatorio en base-b de N pasos es asintóticamente igual a $\sqrt{\pi N/2}$.

La distancia esperada al origen

Teorema

La distancia esperada al origen de un camino aleatorio en base-b de N pasos es asintóticamente igual a $\sqrt{\pi N}/2$.

Número	Base	Pasos	Distancia media normalizada al origen: $\frac{1}{\text{Pasos}}\sum_{N=2}^{\text{Pasos}} \frac{\text{dist}_N}{\frac{\sqrt{\pi N}}{2}}$	Normal
Media de 10.000 caminos aleatorios	4	1.000.000	1,00315	Sí
Media de 10.000 caminos basados en dígitos de π	4	1.000.000	1,00083	?
$\alpha_{2,3}$	3	1.000.000	0,89275	?
$\alpha_{2,3}$	4	1.000.000	0,25901	Sí
$\alpha_{2,3}$	6	1.000.000	108,02218	No
π	4	1.000.000	0,84366	?
π	6	1.000.000	0,96458	?
π	10	1.000.000	0,82167	?
π	10	1.000.000.000	0,59824	?
$\sqrt{2}$	4	1.000.000	0,72260	?
Champernowne C_{10}	10	1.000.000	59,91143	Sí

Contenido

Número de puntos visitados en una red 2D

- La esperanza del número de puntos distintos visitados por un camino aleatorio de N-pasos en una red bidimensional es asintóticamente igual a $\pi N/\log(N)$ (Dvoretzky–Erdős, 1951).

Número de puntos visitados en una red 2D

- La esperanza del número de puntos distintos visitados por un camino aleatorio de N-pasos en una red bidimensional es asintóticamente igual a $\pi N/\log(N)$ (Dvoretzky–Erdős, 1951).
- Problema práctico: la velocidad de convergencia es bastante lenta (del orden de $O\left(N\log\log N/(\log N)^2\right)$).

Número de puntos visitados en una red 2D

- La esperanza del número de puntos distintos visitados por un camino aleatorio de N-pasos en una red bidimensional es asintóticamente igual a $\pi N/\log(N)$ (Dvoretzky–Erdős, 1951).
- Problema práctico: la velocidad de convergencia es bastante lenta (del orden de $O\left(N\log\log N/(\log N)^2\right)$).
- D. Downham y S. Fotopoulos dieron en 1988 las siguientes cotas sobre la esperanza:

$$\left(\frac{\pi(N+0.84)}{1.16\pi-1-\log 2+\log(N+2)},\frac{\pi(N+1)}{1.066\pi-1-\log 2+\log(N+1)}\right).$$

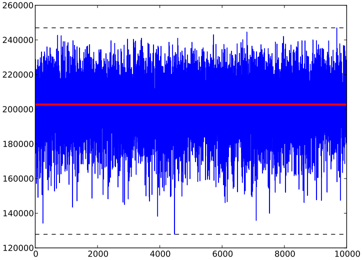
Número de puntos visitados en una red 2D

- La esperanza del número de puntos distintos visitados por un camino aleatorio de N-pasos en una red bidimensional es asintóticamente igual a $\pi N/\log(N)$ (Dvoretzky–Erdős, 1951).
- Problema práctico: la velocidad de convergencia es bastante lenta (del orden de $O\left(N\log\log N/(\log N)^2\right)$).
- D. Downham y S. Fotopoulos dieron en 1988 las siguientes cotas sobre la esperanza:

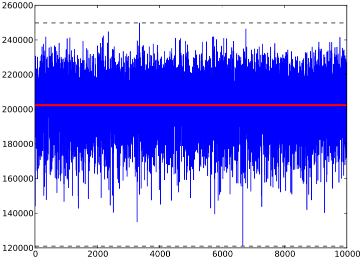
$$\left(\frac{\pi(N+0.84)}{1.16\pi-1-\log 2+\log(N+2)},\frac{\pi(N+1)}{1.066\pi-1-\log 2+\log(N+1)}\right).$$

- Por ejemplo, para $N=10^6$ estas cotas son $(199.256,203.059)$, mientras que $\pi N/\log(N)=227.396$, lo cual sobrestima la esperanza.

Número de puntos visitados



(a) Caminos (pseudo)aleatorios.



(b) Caminos basados en 10.000 millones de dígitos de π.

Figura : Número de puntos visitados por 10^4 caminos en base-4 de un millón de pasos.

Puntos visitados en diversos caminos en base-4

Número	Pasos	Ptos. visitados	Esperanza de ptos. visitados por un camino aleatorio	
			Cota inferior	Cota superior
Media de 10.000 caminos aleatorios	1.000.000	202.684	199.256	203.060
Media de 10.000 caminos basados en los dígitos de π	1.000.000	202.385	199.256	203.060
$\alpha_{2,3}$	1.000.000	95.817	199.256	203.060
$\alpha_{3,2}$	1.000.000	195.585	199.256	203.060
π	1.000.000	204.148	199.256	203.060
π	10.000.000	1.933.903	1.738.645	1.767.533
π	100.000.000	16.109.429	15.421.296	15.648.132
π	1.000.000.000	138.107.050	138.552.612	140.380.926
e	1.000.000	176.350	199.256	203.060
$\sqrt{2}$	1.000.000	200.733	199.256	203.060
$\log 2$	1.000.000	214.508	199.256	203.060
Champernowne C_4	1.000.000	548.746	199.256	203.060
Número racional Q_1	1.000.000	378	199.256	203.060
Número racional Q_2	1.000.000	939.322	199.256	203.060

Los núm. normales pueden no ser muy “aleatorios”...

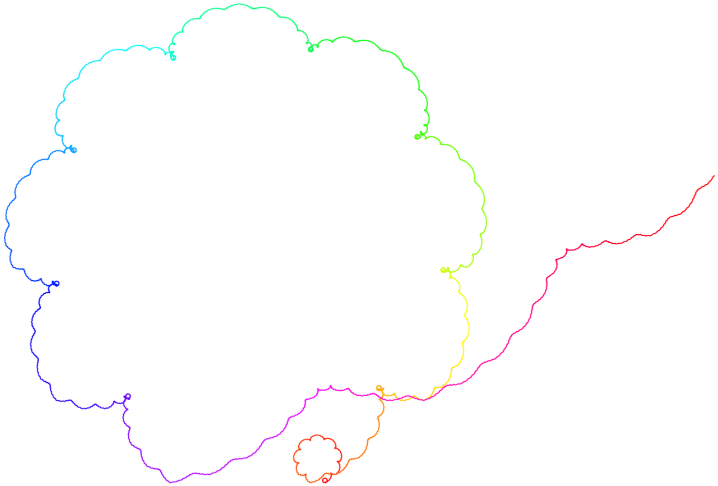


Figura : Champernowne $C_{10} = 0,123456789101112\ldots$ (normal).
Distancia normalizada al origen: 15,9 (50.000 pasos).

Los núm. normales pueden no ser muy “aleatorios”...

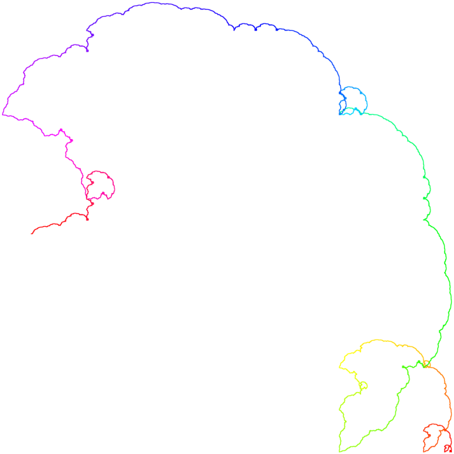


Figura : Champernowne $C_4 = 0,123101112132021\ldots$ (normal).
Distancia normalizada al origen: 18,1 (100.000 pasos).
Puntos visitados: 52.760. Esperanza: (23.333, 23.857).

Los núm. normales pueden no ser muy "aleatorios"...

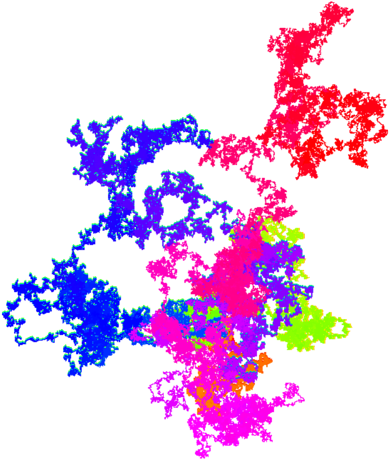


Figura : Stoneham $\alpha_{2,3} = 0{,}0022232032\ldots_4$ (normal base 4).
Distancia normalizada al origen: 0,26 (1.000.000 pasos).
Puntos visitados: 95.817. Esperanza: (199.256, 203.060).

Los núm. normales pueden no ser muy “aleatorios”...

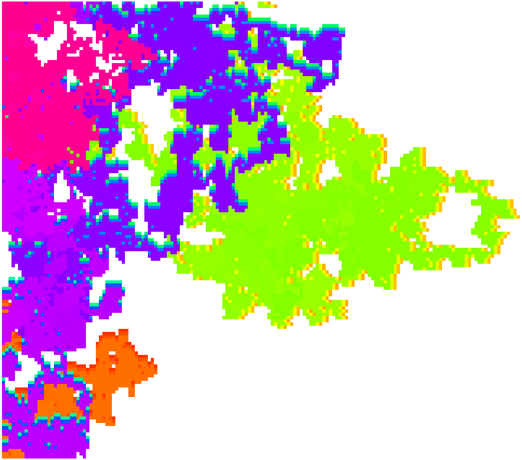


Figura : Stoneham $\alpha_{2,3} = 0{,}0022232032\ldots_4$ (normal base 4).
Distancia normalizada al origen: 0,26 (1.000.000 pasos).
Puntos visitados: 95.817. Esperanza: (199.256, 203.060).

Los núm. normales pueden no ser muy "aleatorios"...

Los núm. normales pueden no ser muy “aleatorios”...

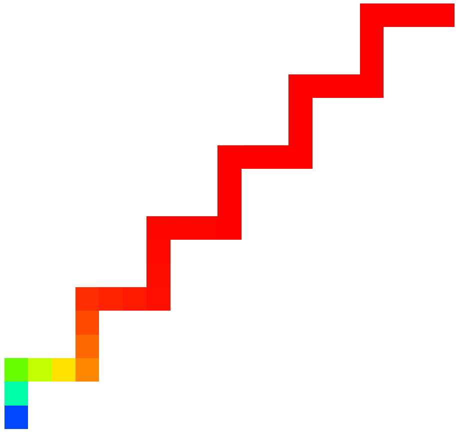


Figura : Un patrón en los dígitos de $\alpha_{2,3}$ base 4. Mostramos sólo las posiciones del camino tras $\frac{3}{2}(3^n+1), \frac{3}{2}(3^n+1)+3^n$ y $\frac{3}{2}(3^n+1)+2\cdot 3^n$ pasos, $n=0,1,\ldots,11$.

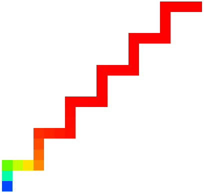
Una conjetura... (demostrada por M. Coons '13)

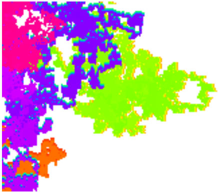
Conjetura (Estructura en base-4 del número de Stoneham $\alpha_{2,3}$)

Denotar a_k *el* $k^{\text{ésimo}}$ *dígito de* $\alpha_{2,3}$ *en su expansión en base-4; es decir,* $\alpha_{2,3} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k/4^k$*, con* $a_k \in \{0,1,2,3\}$ *para todo* k*. Entonces, para todo* $n = 0,1,2,\ldots$ *se tiene:*

(i) $$\sum_{k=\frac{3}{2}(3^n+1)}^{\frac{3}{2}(3^n+1)+3^n} e^{a_k \pi i/2} = \begin{cases} -i, & n \text{ impar} \\ -1, & n \text{ par} \end{cases};$$

(ii) $a_k = a_{k+3^n} = a_{k+2\cdot 3^n}$ *para todo* $k = \frac{3}{2}(3^n+1), \frac{3}{2}(3^n+1)+1, \ldots, \frac{3}{2}(3^n+1)+3^n-1.$





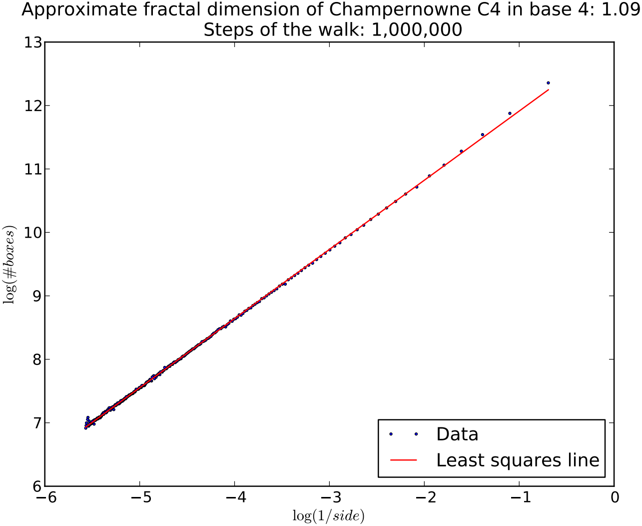
Stoneham $\alpha_{3,5}$ es normal en base 3... pero no muy "aleatorio"

Contenido

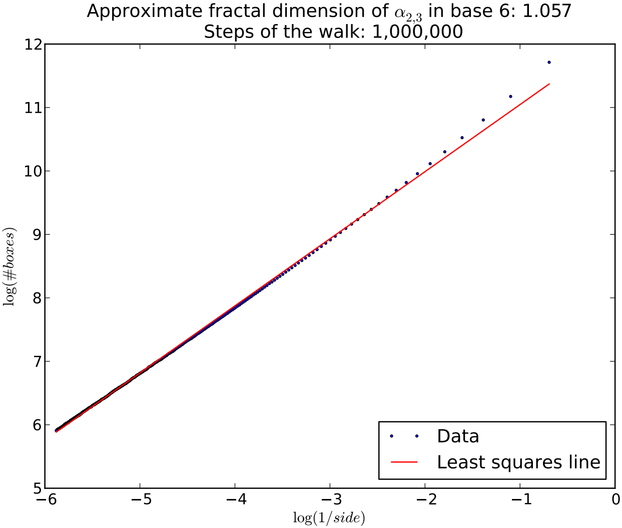
Dimensión de conteo de cajas

$$\text{dimensión de cajas} = \lim_{\text{lado}\to 0} \frac{\log(\#\ \text{cajas})}{\log(1/\text{lado})}$$

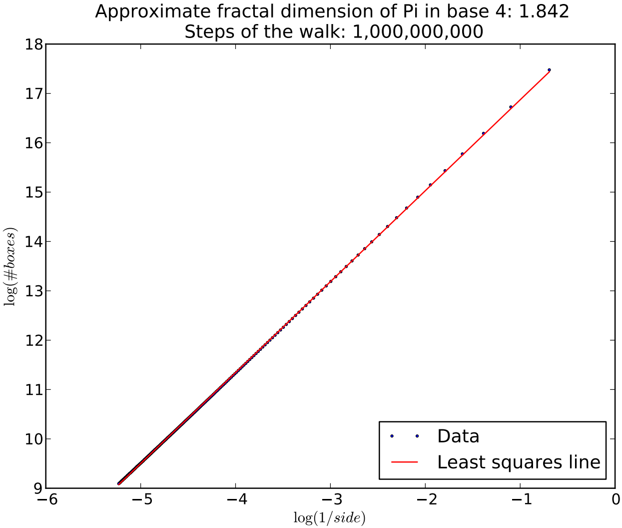
Dimensión de conteo de cajas



Dimensión de conteo de cajas



Dimensión de conteo de cajas



Contenido

Caminos en 3D

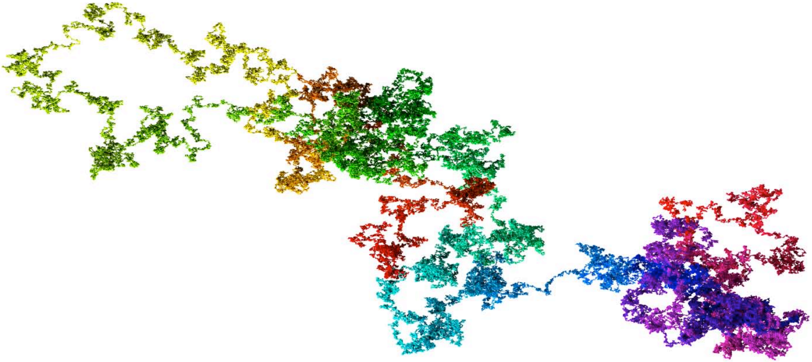


Figura : Camino en 3D de Matt Skerritt sobre π (base 6), un millón de pasos.

Contenido

Juegos del caos

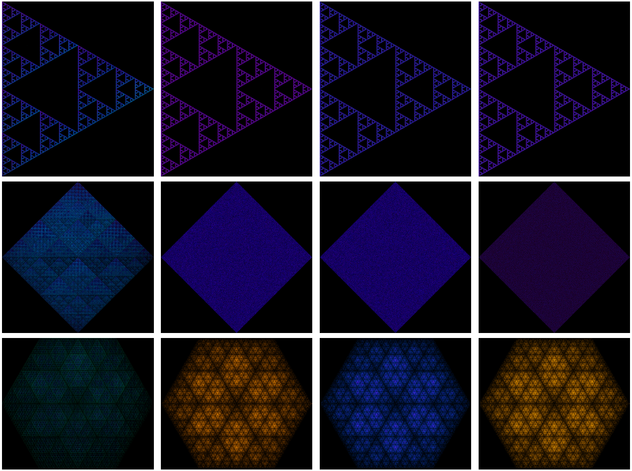
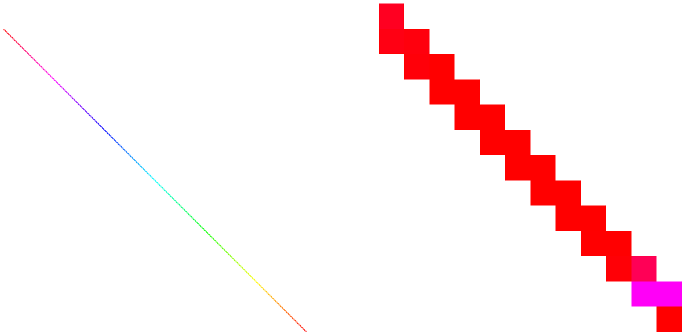


Figura : Coloreado por la frecuencia. Fila 1: Champernowne C_3, $\alpha_{3,5}$, aleatorio, $\alpha_{2,3}$. Fila 2: Champernowne C_4, π, aleatorio, $\alpha_{2,3}$. Fila 3: Champernowne C_6, $\alpha_{3,2}$, aleatorio, $\alpha_{2,3}$.

Contenido

Números automáticos

Los números automáticos nunca son normales...
... y sus caminos son típicamente bastante aburridos:



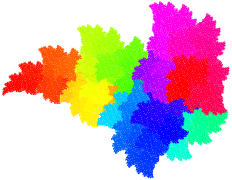
(a) 1.000 dígitos de la sucesión Thue–Morse base 2.

(b) 10 millones de dígitos de la sucesión de "doblado de papel" base 2.

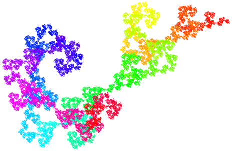
Figura : Caminos basados en dos números automáticos y no normales.

Números automáticos

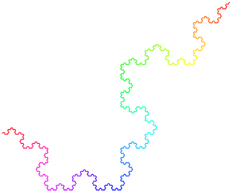
... ¡pero sus dibujos de tortuga son geniales!



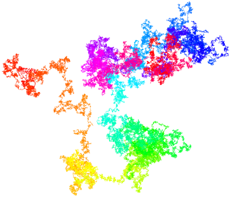
(a) Diez millones de dígitos de la sucesión de doblado de papel, con ángulo de rotación 60°.



(b) Un millón de dígitos de la sucesión de doblado de papel, con ángulo de rotación 120°.



(c) 100.000 dígitos de la sucesión Thue–Morse, ángulo de rotación 60°.



(d) Un millón de dígitos de π, ángulo de rotación 60°.

Contenido

Un camino basado en π

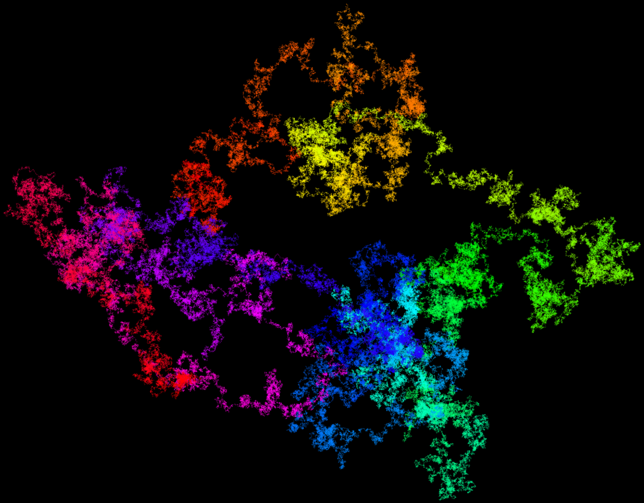


Figura : Camino de 100.000 millones de dígitos de π en base-4 (¿normal?).

Un camino basado en π

Resolución: 372.224×290.218 píxeles
(108 gigapíxeles)

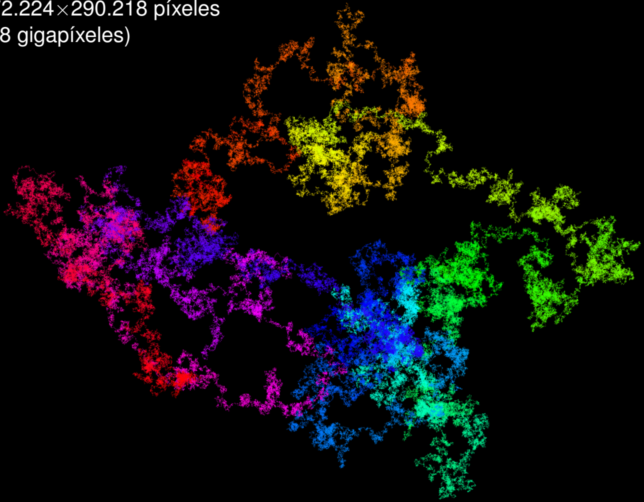


Figura : Camino de 100.000 millones de dígitos de π en base-4 (¿normal?).

Un camino basado en π

Resolución: 372.224×290.218 píxeles
(108 gigapíxeles)

La computación tardó aprox. un mes donde la mayor parte del algoritmo se ejecutaba en paralelo con 20 hilos de ejecución en el clúster MacPro de CARMA

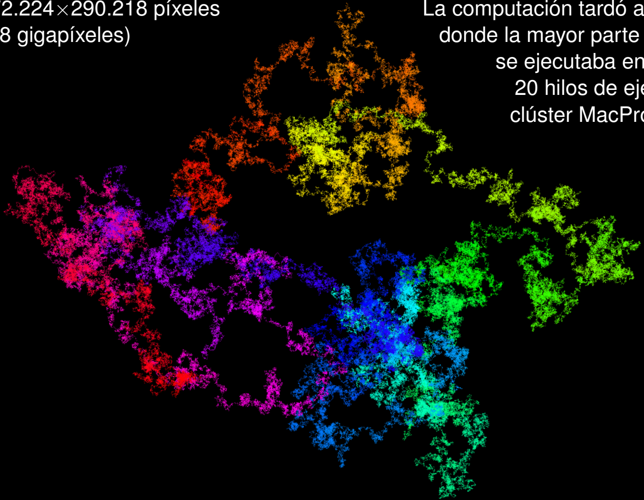


Figura : Camino de 100.000 millones de dígitos de π en base-4 (¿normal?).
`http://gigapan.org/gigapans/106803`

Contenido

The Aperiodical

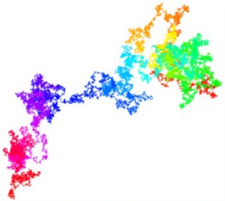
Share some maths · About the Aperiodical · Carnival of Mathematics · Seen some good new research? · Search

WLTM real number. Must be normal and enjoy long walks on the plane

By Christian Perfect On June 7, 2012 · 1 Comment · In News, Uncategorized

Something that whipped round Twitter over the weekend is an early version of a paper by Francisco Aragón Artacho, David Bailey, Jonathan Borwein and Peter Borwein, investigating the usefulness of planar walks on the digits of real numbers as a way of measuring their randomness.

A problem with real numbers is to decide whether their digits (in whatever base) are "random" or not. As always, a strict definition of randomness is up to either the individual or the enlightened metaphysicist, but one definition of randomness is normality – every finite string of digits occurs with uniform asymptotic frequency in the decimal (or octal or whatever) representation of the number. Not many results on this subject exist, so people try visual tools to see what randomness looks like, comparing potentially normal numbers like π with pseudorandom and non-random numbers. In fact, the (very old) question of whether π is normal was one of the main motivators for this study.



A million step walk on the concatenation of the base 10 digits of the prime numbers, converted to base 4

The Aperiodcast - an irregular audio roundup of what's interesting on the site. Podcast RSS / iTunes

Features

Interesting Esoterica Summation, volume 5

View all features
Subscribe by RSS

News

Subscribe by RSS

http://aperiodical.com/2012/06/wltm-real-number-must-be-normal-and-enjoy-long-walks-on-the-plane/


SOCIAL DIMENSION

PREVIOUS POST NEXT POST

A Random Walk with Pi

By Samuel Arbesman June 12, 2012 | 12:12 pm | Categories: Science Blogs, Social Dimension

Photo: Myki Roventine/Flickr

We've gotten really good at generating big datasets. From what we search for on Google to all the stuff we do on Facebook, we generate a lot of data. And there have in turn been a proliferation of methods of visualizing big data, slicing and dicing it and providing meaning to it.

But what's the mother of all big datasets? The digits of π. Of course, the number of digits in π is infinite, but over the years, as computers have become more powerful, we know many more of them than ever before.

But it's one thing to say that I can download trillions of digits of π and another to make some sort of sense out of all of these digits. Into this stage a team of researchers from Australia, Lawrence Berkeley National Laboratory, and Simon Fraser University with some elegant visualizations of π. In a recent paper, they used a classic method of visualizing large strings of numbers: the random walk.

A true random walk is the path described by a sequence of randomly generated numbers. For example, if we have a string of -1's and 1's, then one way to describe this is by using time as the x-axis, and the y-axis as the cumulative sum of numbers so far. This yields a nice little sawtooth shape.

Alternatively, you can do a random walk on a plane, with each digit describing the direction and distance being moved. In the case of π and the method used by these researchers, they used color to designate additional information. For example, here color is used to designate time, with the blue being earlier in the sequence and the further along the spectrum is later in the sequence.

http://www.wired.com/wiredscience/2012/06/a-random-walk-with-pi/

http://wired.jp/2012/06/15/a-random-walk-with-pi/


wired.jp/category/Science/
TECHNOLOGY
CULTURE
SCIENCE
BUSINESS
MAGAZINE
ARCHIVES
NEWS
LONG STORY
MIND HACK
HOTTEST TOPIC
1 203 RT 円周率をランダムウォークで視覚化
2 130 RT 新MacBook Proは「ほとんど修理不可能」
3 92 RT 伊藤穰一が語る「イノベーションの民主化」とその破壊的変化にしなやかに対応するため
4 73 RT グーグルマップと別れ、アップルは成功への道を走れるか
5 67 RT アップルとグーグルが、GPS専用端末を殺すとき
RANKING
1 「新MacBook Proは種の進化だ」
2 日常世界のラブドー
LATEST NEWS
円周率をランダムウォークで視覚化
国際的な研究者チームが、ランダムウォークというモデルを使って、1,000億桁に及ぶ円周率を視覚化した。ほかの定数の視覚化もあり、円周率が非常に「ランダム」であることがよくわかる。
316
ツイート 269
B! 40
2012 SS
NEW YORK
COLLECTION
Photos: VOGUE JAPAN
BRANDS for FRIENDS
注目ブランドのバリュー情報をお届け!!
WIRED.jp
読者アンケート＆
プレゼント実施中!
"生命"を制するものが、
21世紀を制する
WIREDの
未来生物学講義
VOL. 4
5月10日
発売
wired.jp/2012/06/15/a-random-walk-with-pi/

HOTTEST TOPIC

1. 276 RT
   円周率をランダムウォークで視覚化
2. 186 RT
   新MacBook Proは「ほとんど修理不可能」
3. 90 RT
   アップルとグーグルが、GPS専用端末を殺すとき
4. 85 RT
   グーグルマップと別れ、アップルは成功への道を走れるか
5. 85 RT
   赤ん坊のように言葉を学ぶロボット：動画

RANKING

1. 円周率をランダムウォークで視覚化
2. 新MacBook Proは「ほとんど修理不可能」
3. アップルとグーグルが、GPS専用端末を殺すとき
4. グーグルマップと別れ、アップルは成功への道を走れるか
5. 「新MacBook Proは種の進化だ」

HOTTEST TOPIC

1. 276 RT
   円周率をランダムウォークで視覚化
2. 186 RT
   新MacBook Proは「ほとんど修理不可能」
3. 90 RT
   アップルとグーグルが、GPS専用端末を殺すとき
4. 85 RT
   グーグルマップと別れ、アップルは成功への道を走れるか
5. 85 RT
   赤ん坊のように言葉を学ぶロボット：動画

RANKING

1. 円周率をランダムウォークで視覚化
2. 新MacBook Proは「ほとんど修理不可能」
3. アップルとグーグルが、GPS専用端末を殺すとき
4. グーグルマップと別れ、アップルは成功への道を走れるか
5. 「新MacBook Proは種の進化だ」

HOTTEST TOPIC

1. 276 RT
   Random walk in the Pi visualization
2. 186 RT
   The new MacBook Pro is "almost impossible to repair"
3. 90 RT
   Apple and Google are, kill a dedicated terminal at GPS
4. 85 RT
   Google Maps and separation, or Apple can run on the road to success
5. 85 RT
   Video: Robots learn the language like a baby

RANKING

1. Random walk in the Pi visualization
2. The new MacBook Pro is "almost impossible to repair"
3. Apple and Google are, kill a dedicated terminal at GPS
4. Google Maps and separation, or Apple can run on the road to success
5. "The evolution of species' s new MacBook Pro"

GIZMODO TOP STORIES

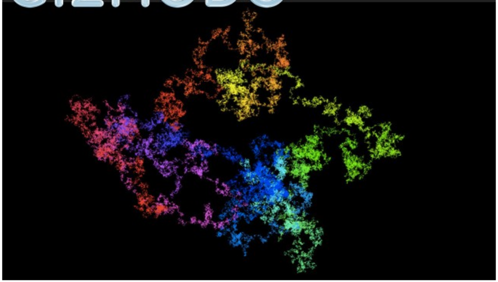


IMAGE CACHE

What Is This?

JAN 10, 2013 7:45 AM 21,041 102

Share Like 140

Jamie Condliffe

This ragged cloud of color looks messy and unstructured—but in fact it's a rare and unusual view of one of the most fundamental things in science. Can you work out what it is?

Sadly for you, we're going to let you puzzle over the answer for a little while. To stop you all going round in circles, though, here are a couple of clues: it was generated by a computer and the thing it depicts is used in every branch of science, from mathematics to engineering.

We'll post the solution here in an hour or so. Until then, try and work out exactly what it is amongst yourselves in the comments—without cheating and resorting to Google Images.

Update: You can find the answer here.

LATEST STORIES THURSDAY, JAN 10, 2013

THE GADGET GUIDE

NEWER STORIES...

IMAGE CACHE 21,046
What Is This?

DESIGN 19,393
Forget Pantone, Here's Beertone

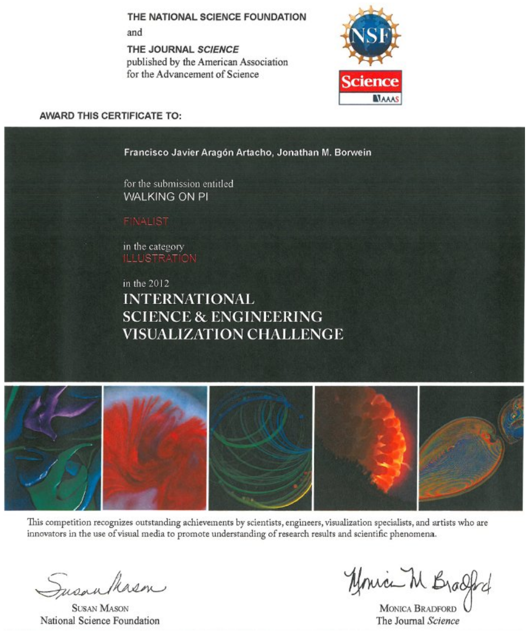
ERIC SCHMIDT 17,673
WSJ: Schmidt Is Giving North Korea What For

POLAROID 23,643
Polaroid's New Android Tablets Might Give Nexus Some Stiff Competition

Netflix has confirmed that there will be 14 new Arrested Development episodes, which will start airing in May. [Netflix]

IMAGE CACHE 28,509

http://gizmodo.com/5974779/what-is-this



THE NATIONAL SCIENCE FOUNDATION
and
THE JOURNAL *SCIENCE*
published by the American Association
for the Advancement of Science

AWARD THIS CERTIFICATE TO:

Francisco Javier Aragón Artacho, Jonathan M. Borwein

for the submission entitled
WALKING ON PI

FINALIST

in the category
ILLUSTRATION

in the 2012
INTERNATIONAL
SCIENCE & ENGINEERING
VISUALIZATION CHALLENGE

This competition recognizes outstanding achievements by scientists, engineers, visualization specialists, and artists who are innovators in the use of visual media to promote understanding of research results and scientific phenomena.

Susan Mason
National Science Foundation

Monica Bradford
The Journal *Science*

Main References

Webpage: www.sites.google.com/site/franaragon

- M. BARNSLEY: *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- **F.J. ARAGÓN ARTACHO, D.H. BAILEY, J.M. BORWEIN, P.B. BORWEIN: Walking on real numbers, The Mathematical Intelligencer 35 (2013), 42–60.**
- D.H. BAILEY AND J.M. BORWEIN: Normal numbers and pseudorandom generators, Proceedings of the Workshop on Computational and Analytical Mathematics in Honour of Jonathan Borwein's 60th Birthday, Springer, in press 2012.
- D.H. BAILEY AND R.E. CRANDALL: Random generators and normal numbers, Experimental Mathematics 11 (2002), no. 4, 527–546.
- D.G. CHAMPERNOWNE: The construction of decimals normal in the scale of ten, Journal of the London Mathematical Society 8 (1933), 254–260.
- A.H. COPELAND AND P. ERDŐS: Note on normal numbers, Bulletin of the American Mathematical Society 52 (1946), 857–860.
- D.Y. DOWNHAM AND S.B. FOTOPOULOS: The transient behaviour of the simple random walk in the plane, J. Appl. Probab. 25 (1988), no. 1, 58–69.
- A. DVORETZKY AND P. ERDŐS: Some problems on random walk in space, Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (1951), 353–367.
- G. MARSAGLIA: On the randomness of pi and other decimal expansions, preprint (2010).
- R. STONEHAM: On absolute (j,ε)-normality in the rational fractions with applications to normal numbers, Acta Arithmetica 22 (1973), 277–286.